A3.3.1 Zeige, dass eine reelle Zahl $x\in(0,1)$ rational ist, wenn ihre Dezimalbruchentwicklung periodisch ist. (Periode 9 darf nicht auftreten)

Lös: Zu $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ $\exists$ $n_0\in\mathbb{N}$ und $p\in\mathbb{N}$ mit $a_{n+p}=a_n$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\Rightarrow$

$$x=\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+\nu p+j}10^{-n_0-\nu p-j}=\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j}10^{-n_0-\nu p-j}=$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j}10^{-n_0-j}\sum_{\nu=0}^{\infty}10^{-\nu p}=\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j}10^{-n_0-j}\sum_{\nu=0}^{\infty}(10^{-\nu})^p \underbrace{=}_{S2.1.2}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}}_{\in Q}+\underbrace{\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j}10^{-n_0-j}\frac{1}{1-10^{-p}}}_{\in Q}\in\mathbb{Q}.$$

A3.3.2 Zeige, dass die Menge der Folgen von Ziffern $z_k\in\{0,1,...,g-1\}$ für die alle z_k ab einer gewissen Stelle gleich $g-1$ sind, abzählbar unendlich ist.

A3.3.3 Finde die dezimalen, dualen und hexadezimalen Darstellungen folgender rationaler Zahlen: ½, 1/7, 1/9, 1/3

A3.3.4

a) Es sei b eine natürliche Zahl ≥ 2. Zeige: Jede reelle Zahl $x\geq 0$ besitzt eine Darstellung der Gestalt

$$x=\sum_{n=m}^{\infty} a_n b^{-n} \text{ mit } -m\in\mathbb{N}_0,\ a_n\in\{0,...,b-1\},\ \forall\ n\geq m.$$

Mit den Zusatzforderungen $a_m\neq 0$, falls $m<0$, und $a_n\neq b-1$ für unendlich viele $n\geq m$ ist diese Darstellung eindeutig. (Diese Darstellung heißt b-Bruchentwicklung oder b-Bruchdarstellung von x. Im Falle b=10, b=16, b=8, b=2 spricht man auch von der Dezimal-, Hexadezimal-, Oktal-, Binärentwicklung oder -Darstellung von x)

Hinweis zur Existenz der Darstellung: Definiere die a_n folgendermaßen rekursiv:

$x_m:=xb^m$ mit $m:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+\mu}\}$, und

$a_n:=[x_n]$, $x_{n+1}:=b(x_n-a_n)$ für $n\geq m$.

Verdeutlichung an einem Beispiel:

* $x=\sqrt{151}=12,288...$ als Dezimalbruch darstellen:

$10^1=10=\sqrt{100}<\underbrace{\sqrt{151}}_{=x}<\sqrt{10000}=100=10^2=10^{1+1}$ $\Rightarrow$ $m=-1$.

$x_{-1}=x\cdot 10^{-1}$ $\Rightarrow$ $a_{-1}=[x_{-1}]=[x\cdot 10^{-1}]=1$

(denn $1=\sqrt{\frac{100}{100}}\leq\sqrt{151}\cdot 10^{-1}=\underbrace{\sqrt{\frac{151}{100}}}_{x_{-1}}<\sqrt{\frac{400}{100}}=2$) $\Rightarrow$

$x_0=10(\underbrace{x\cdot 10^{-1}}_{=x_{-1}}-\underbrace{1}_{a_{-1}})=10(12,288...\cdot 10^{-1}-1)=$

$10(1,2288...-1)=10\cdot 0,2288..=2,288..$ $\Rightarrow$ $a_0=[x_0]=2$ $\Rightarrow$

$x_1=10(x_0-2)$ $\Rightarrow$ $a_1=2$ $\Rightarrow$

$x_2=10(x_1-2)$ $\Rightarrow$ $a_2=8$ usw

$\sqrt{151}=12,288$ ($x_{-1}=1,228..$ $x_0=2,28..$ $x_1=2,8..$ $x_2=8,8...$usw)

$\sqrt{151}=\sum_{\nu=m=-1}^{1} a_\nu 10^{-\nu}+x_2 10^{-2}=\underbrace{a_{-1}}_{1}10^{-(-1)}+\underbrace{a_0}_{2}\cdot 10^0+\underbrace{a_1}_{2}10^{-1}+8.8...\cdot 10^{-2}=$

$=12,2+8,8...\cdot 10^{-2}$

#siehe Anlage P33

Lös:#teilweise selbst in Anlehnung an Aufschrieb ergänzt#

Behauptung

(●) $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ mit $x\geq 0$ $\exists$ $m\in\mathbb{Z}$, $m\leq 0$ und $\forall$ $n\geq m$ $\exists$ $a_n\in\{0,1,..,g-1\}$,

sodass $x=\sum_{n=m}^{\infty} a_n b^{-n}$.

(● ●)Mit der Zusatzforderung $a_m\neq 0$ falls $m<0$ und nicht ($a_n=b-1$ für fast alle $n\geq m$),(d.h. $\forall$ $n_0\geq m$ $\exists$ $n\geq n_0$:$a_n\neq b-1$, d.h. $a_n\neq b-1$ für unendlich viele $n\geq m$) ist die Darstellung aus (●) eindeutig.

*//**S1.5.5**(706) Wohlordnungssatz//*

//Vor:$M\subset\mathbb{N}$ und $M\neq\emptyset$ Beh: $\exists$ minM//

*//**S2.1.3** (1255)(a_n),(b_n),(c_n) Folgen aus R: $a_n\to a$,$b_n\to b$,($n\to\infty$)//*

//3.)$a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b$ $\Rightarrow$ $c_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} a$, $a_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} b=a$//

Bew: Sei $x\geq 0$ fest.

(●) Definiere $m:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}\}$;

(beachte $g^{1+\mu} \underbrace{\to}_{\mu\to\infty} \infty \Rightarrow \{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}\}\neq\emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.5} \exists \min\{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}\} \Rightarrow m\in\mathbb{Z},\ m\leq 0$

(und $b^{-m}\leq x<b^{1-m}$ *siehe später).

Z.B: 0 b^2 b^3 x b^4 hier $m=-3$

Definiere jetzt rekursiv: $x_m:=xb^m$, $a_n:=[x_n]$, $x_{n+1}:=b(x_n-z_n)$ ür $n\geq m$.
Dann gilt, wie anschließend bewiesen, $\forall\ n\geq m$:

$(\alpha)\ x=\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+x_nb^{-n} \Rightarrow x_n=(x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu})b^n$

$(\beta)\ 0\leq x_n<b$

$(\gamma)\ a_n\in\{0,1,..,b-1\}$

siehe Bsp * oben

Bew zu (α)

Zu $(\alpha),(\beta)$..Induktion nach n:

$n=m$: $x_m=xb^m \Rightarrow x=x_mb^{-m}=\underbrace{\sum_{\nu=m}^{m-1} a_\nu b^{-\nu}}_{=0}+x_mb^{-m}$ ...

Nach Def von m gilt $x<b^{1-m} \Rightarrow 0\leq x_m=\underbrace{x}_{\geq 0\ nach Vor} b^m<b^{1-m}b^m=b$

$\underbrace{n\mapsto n+1}_{n\geq m}$: $x \underbrace{=}_{IndHyp} \sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+\underbrace{x_n}_{=a_n+x_{n+1}b^{-1}} b^{-n}=\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+(a_n+x_{n+1}b^{-1})b^{-n}=$

$x_{n+1}=b(x_n-z_n) \Rightarrow x_n=a_n+x_{n+1}b^{-1}$

$=\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu b^{-\nu}+x_{n+1}b^{-1}b^{-n}=\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu b^{-\nu}+x_{n+1}b^{-(n+1)}$

Bew zu (β): $\underbrace{0\leq x_n-a_n<1}_{da\ a_n=[x_n]} \Rightarrow 0\leq b(x_n-a_n)<b \Rightarrow 0\leq x_{n+1}=b(x_n-a_n)<b$

Bew zu (γ): folgt direkt aus (β)

Wegen $x_nb^{-n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ (da $0\leq x_nb^{-n} \underbrace{<}_{(\beta)} b\cdot b^{-n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ & **S2.1.3 3.**)

und (α) folgt: $x=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$

$(\alpha)\ x=\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+x_nb^{-n} \Rightarrow x_n=(x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu})b^n$

Bem: (.) Es gilt $x_nb^{-n}=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$

(da nach (α) $x_nb^{-n}=x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$) $n\geq m$.

(..) Für obige a_n gilt nicht: $\{a_n=b-1$ für fast alle $n)\}$

Bew: Ann $a_n=b-1\ \forall\ n\geq n_0$ für ein $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\geq m \Rightarrow$

$$x_{n_0}b^{-n_0} \underbrace{=}_{Bem(.)} \sum_{\nu=n_0}^{\infty} \underbrace{a_\nu}_{=b-1} b^{-\nu}=(b-1) \underbrace{b^{-n_0}}_{ausgeklammert\Rightarrow\nu=0} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}}_{\underbrace{=}_{geomReihe}\frac{1}{1-b^{-1}}} =$$

$$(b-1)\,b^{-n_0}\frac{b}{(b-1)}=b^{1-n_0} \Rightarrow x_{n_0}=b \text{ Widerspruch zu } \beta$$

(● ●) Eindeutigkeit der Darstellung: Es seien m,a_n,x_n für $n\geq m$ wie in (●)

Sei $x=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}$ mit $-M\in\mathbb{N}_0$ und $b_\nu\in\{0,1,..,b-1\}\ \forall\ \nu\ge M$, sowie zusätzlich: $b_M\neq 0$, falls $M<0$ und nicht ($b_\nu=b-1$ für fast alle $\nu\ge m$).
Z.z. $M=m$ und $b_\nu=a_\nu\ \forall\ \nu\ge m$

Definiere für $n\ge M$ (siehe Bem (.)): $y_n:=b^n\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=n}^{\infty}\underbrace{b_\nu}_{\ge 0} b^{n-\nu}$

Wir wollen zeigen: $y_n=x_n\ \forall\ n\ge M$

$$0\le y_n=\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{n-\nu} < \sum_{\nu=n}^{\infty}(b-1)b^{n-\nu}=(b-1)\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}}_{=\frac{1}{1-b^{-1}}=\frac{b}{b-1}}=g\ \forall\ n\ge M,$$

$b_\nu\le b-1\ \forall\ \nu\ge n$ und $b_\nu\neq b-1$ für mindestens 1 $\nu\ge n$

d.h. $0\le y_n<b\ \forall\ n\ge M \Rightarrow x=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=b^{-M}b^{M}\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=y_M b^{-M}<bb^{-M}=b^{1-M}$

Hieraus folgt: $M=m$, denn

1.Fall: $M=0$: $x<b\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def von m}}$ $(m:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}=b^{1+0}\}\Rightarrow m=0$

2.Fall: $M\neq 0$ (d.h. $M<0$): $b^{-M}\underbrace{\le}_{b_M\neq 0,\, d.h.\, b_M\ge 1\, da\, M<0} b_M b^{-M}\le\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=x<b^{1-M}\underbrace{\Rightarrow}_{\text{siehe Seite 1806}}$
$M:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+M}\}=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+m}\}=m.$

#3.Fall: $M\neq 0, M>0$: $x=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}<(b-1)b^{-M}\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}=\frac{(b-1)b}{b^{M}(b-1)}=b^{1+(-M)}\Rightarrow$
$M:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+(-M)}\}$, analog a_ν statt $b_\nu b$
$M:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+(-m)}\}\Rightarrow M=m$

$$y_{n+1}=b^{n+1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=b^{n+1}\Big(\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}-b_n b^{-n}\Big)=b\Big(b^n\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}-b_n\Big)=b(y_n-b_n)\Rightarrow$$
$y_n=x_n\ \forall\ n\ge m$ nach folgendem Bew durch Induktion nach n:

n=m: $y_m=b^m\underbrace{\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}}_{=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=x}=b^m x\underbrace{=}_{\text{siehe Seite 1807}}x_m$

$n\mapsto n+1$: $y_{n+1}\underbrace{=}_{\text{s.o.}}b(y_n-b_n)\underbrace{=}_{\text{IndHyp}}b(x_n-b_n)=x_{n+1}$.

Wegen $b_n=[y_n]\ \forall\ n\ge m$ folgt: $a_n=[x_n]=[y_n]=b_n\ \forall\ n\ge m$

da $y_n:=\sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu+n}g^{n-\nu}=b_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu b^{n-\nu}$ und

$$0\le\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu b^{n-\nu}<\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(b-1)b^{n-\nu}=(b-1)b^n\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\nu}=(b-1)b^n\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-(\nu+n+1)}=$$
$$(b-1)\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-(\nu+1)}=(b-1)b^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}=(b-1)b^{-1}(b-1)^{-1}b=1\Rightarrow[y_n]=b_n$$

b)Berechne die Binärdarstellung der Dezimalzahl 5,2

Lös: $(5,2)_{10}$. $m=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0 : 5,2<2^{1+\mu}\}=-2$, da $2^2\le 5,2<2^3$,

$x_{-2}=5,2\cdot 2^{-2}=1,3 \Rightarrow a_{-2}=[1,3]=1 \Rightarrow x_{-1}=2(1,3-1)=0,6 \Rightarrow a_{-1}=[0,6]=0 \Rightarrow$
$x_0=2(0,6-0)=1,2 \Rightarrow a_0=1 \Rightarrow x_1=2(1,2-1)=0,4 \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow$
$x_2=2(0,4-0)=0,8 \Rightarrow a_2=0 \Rightarrow x_3=2(0,8-0)=1,6 \Rightarrow a_3=1 \Rightarrow$
$x_4=2(1,6-1)=\underbrace{1,2}_{=x_0} \Rightarrow a_4=1=a_0 \Rightarrow x_5=x_1,\ a_5=a_1 \Rightarrow x_6=x_2,\ a_6=a_2$ usw $\Rightarrow$

$$(5,2)_{10}=(101,00110011\ldots)_2=(101,\underbrace{\overline{0011}}_{Periode})_2$$

c)Berechne die 7-Bruchdarstellung der Dezimalzahl 2000

Lös: $x=(2000)_{10}$. $7^3=343<2000<2100<7^4 \Rightarrow m=-3$,

$x_{-3}=2000\cdot 7^{-3}\in[5,6) \Rightarrow a_{-3}=5 \Rightarrow x_{-2}=7(2000\cdot 7^{-3}-5)\in[5,6) \Rightarrow a_{-3}=5 \Rightarrow$
$x_{-1}=7(x_{-2}-5)\in[5,6) \Rightarrow a_{-1}=5 \Rightarrow x_0=5 \Rightarrow a_0=5$. Also $(2000)_{10}=(5555)_7$.