D4.2.4 (2350) (Körper: $\mathbb{K}$, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

- Eine Funktionenfolge ist eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Funktionen f_i: $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, Definitions ($D \subset \mathbb{K}$)- und Zielmengen ($Z \subset \mathbb{K}$) können auch andere Mengen sein, z.B. Intervalle, müssen jedoch für alle f_i dieselben sein: f: $D \times \mathbb{N} \to Z$, $(x,n) \mapsto f_n(z)$

Voausbetrachtung zu ● ● und ● ● ●

Verhalten von $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. für $x \in [0,1]$ und $x \in [1,2]$

Zunächst $\exists\ f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ * $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, dies ist in diesem Fall die sogenannte Grenzfuntion zu $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

(.) * $\Rightarrow\ \forall\ x \in [1,2]\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_{(\varepsilon,z)}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \ \forall\ n > N_{(\varepsilon,z)}$

Hier wurde in jede f_n das gleiche $x \in [1,2]$ eingesetzt und die Betrachtung gilt unter dieser Bedingung $\forall\ x \in [1,2]$.
Wie siehts aus, wenn in jede f_n unterschiedliche $x_n \in [0,1]$ oder $x_n \in [\ [1,2]$ eingesetzt werden, z.B. $x_n = 1/n$ in $[0,1]$?

(..) Sei $x_n \in [0,1]$ & $\underset{\in[0,1]}{x_n} = 1/n$ & $f(x) = 0 \Rightarrow$

$$|f_n(x_n) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = 1/2 =: \varepsilon_0 > 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\exists\ \varepsilon0 > 0\ \ \forall\ n\ \exists\ x_n(=1/n) \in [0,1]$: $|f_n(x_n) - f(x)| = \varepsilon_0$ d.h $|f_n(x_n) - f(x)| \underset{nicht!!!}{<} \varepsilon$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n \geq N\ \ \forall\ x_n \in [0,1]$: $|f_n(x_n) - f(x)| \underset{nicht}{<} \varepsilon$.
Konsequenz siehe ● ● ●

(..) Sei $x_n \in [1,2]$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein, fest, $n_0 = [2/\varepsilon] + 1 \Rightarrow$

$$|f_n(x_n) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \frac{nx_n}{1+n^2(x_n)^2} \underset{x\in[1,2]}{\leq} \frac{n*2}{1+n^2 1^2} \leq \frac{n*2}{0+n^2} = \frac{2}{n} \leq 2/n_0 < \varepsilon\ \ \forall\ n \geq n_0,\ \ \forall\ x \in [1,2] \Rightarrow$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n \geq N_{(\varepsilon)}\ \ \forall\ x_n \in [1,2]$: $|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

Denn $|f_n(x_n) - \underbrace{f(x)}_{=0}|$ wird hier unabhängig von x_n, damit $|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ auch dann, wenn nicht alle x_n, gleich sind. Damit ist $N_{(\varepsilon)}$ nur von ε abhängig.

● ● Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt punktweise konvgt gegen eine Funktion f: $D \to \mathbb{K}$, wenn gilt $\forall\ z \in D\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_{(\varepsilon,z)}: |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\ \forall\ n > N_{(\varepsilon,z)}$

Schreibweise: $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)\ \forall\ z \in D$, diese $f: D \to \mathbb{K}$ heißt Grenzfunktion

Für punktweise konvergente $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert

$f(z)$: $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)\ \forall\ z \in D$ die sogenannte Grenzfunktion

Andere Formulierung:

Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent, falls für jedes $z \in D$ die Folge $(f_n(z))$ konvergent ist. Ist dies der Fall, so heißt $f: D \to \mathbb{K}$, mit $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)\ \forall\ z \in D$, die Grenzfunktion der Folge.

Bsp: $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$, $f_n(x) = x^n \Rightarrow f_n$ konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Bew: $x \in [0,1) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n * \underbrace{\overbrace{\ln x}^{<1}}_{<0} < \ln\ \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \underbrace{\Rightarrow}_{Wahl}$

$$N_{(\varepsilon,x)} = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] + 1$$

● ● ● Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter gilt: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N\ \forall z \in D: |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Andere Formulierung frei nach Uni Saarbrücken (ohne Forderung der <u>punktweisen Konvergenz</u> ...aber f(x) muß existieren)

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt auf D gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion f: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N\ \forall z \in D: |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Äquivalente andere Formulierung frei nach Wikipedia

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine f wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Erläuterungen (gleicher Sachverhalt (verschiedene Formulierungen):
$\alpha)\ \forall\ x\in X\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon,x)}:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall\ n>N_{(\varepsilon,x)}$
$\beta)\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon)}:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall\ n>N_{(\varepsilon)}$ <u>und</u> $\forall\ x\in X$
In α) kann es für jedes x ein $N_{(\varepsilon,x)}$, für das α gilt, weil
$N_{(\varepsilon,x)}$ bedeutet: von x abhängig
In β) muß ein $N_{(\varepsilon)}$ gefunden werden, das für alle x gilt.
#Vergleich zwischen gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz
#Die Wahl von N bei gleichmäßiger Konvergenz hängt nur von ε ab. Im
#Gegensatz dazu hängt bei punktweiser Konvergenz N sowohl von ε als auch
#von x ab. Formuliert man beide Konvergenzbegriffe mithilfe von
#Quantoren, so sieht man, dass sie sich in der Reihenfolge der
#„Einführung" von x und N und damit der Abhängigkeit der zwei Variablen
#voneinander unterscheiden:
#punktweise Konvergenz: $\forall\ x\in X\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon,x)}\ \forall\ n>N_{(\varepsilon,x)}:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$
#gleichmäßige Konvergenz: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon)}\in\mathbb{N}\ \forall\ n>N_{(\varepsilon)}\ \forall\ x\in X:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$
#d. h., für punktweise Konvergenz muss es für jedes x und für jedes $\varepsilon>0$
#eine natürliche Zahl N geben, so dass für alle $n\geq N$ gilt: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
Vergleich ●● und ●●● ...
In ●●: $N_{(\varepsilon,x)}$, d.h. es muss für jedes x ein individuelles $N_{(\varepsilon,x)}$

gefunden werden
in ●●●: $N_{(\varepsilon)}$, d.h. für alle x muss ein gemeinsamer Wert $N_{(\varepsilon)}$
gefunden werden für den im Konvergenzfall $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ gilt.

Bem:1.) Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz
Gleichmäßige Konvergenz $\not\Leftarrow$ Konvergenz

2.) Bei glm Konvergenz gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_{1(\varepsilon)}: \underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_{1(\varepsilon)}$

d.h. $\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ (I beliebiges Intervall)

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ x_n: \underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq|f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \ \forall\ n>n_{0(\frac{\varepsilon}{2})}$

Bsp: z^n, $|z|\leq\varepsilon<1$, $|z^n-0|=|z^n|=|z|^n\leq r^n<\varepsilon$, $r^n<\varepsilon<1 \Leftrightarrow e^{n\log r}<\varepsilon<1$

$\Leftrightarrow n\log r<\log\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{\log\varepsilon}{\log r} \Rightarrow |z^n-0|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon):=[\frac{\log\varepsilon}{\log r}]+1$

$f_n(z):=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, konvergiert $\forall\ 0<r<1$ gleichmäßig auf
$\overline{U_R(0)}$ gegen $f(z)=0$, aber nicht auf $U_1(0)$.
$|f_n(z)-0|=|z^n|=|z|^n\leq r^n<\varepsilon\ \forall\ n=n_0(\varepsilon)$ mit $n_0(\varepsilon):=[\log\varepsilon/\log r]+1$.

A4.2.7

a) Es sei $M \subset K$ und $f, f_n: M \to K$, $n \in N$. (K ... z.B R, C)
Zeige: Gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge (x_n) in M, sodass $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$ für alle oder auch nur unendlich viele n ist, so kann (f_n) nicht gleichmäßig auf M gegen f konvergieren.

Bew: Annahme $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ glm konvergent auf $M \Rightarrow$

Zu $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ $\exists$ $n_0 \in N$ auf M: $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{\forall n \geq n_0}{<} \varepsilon_0$ $\forall$ $x \in M$.

Widerspruch, denn nach Vor gilt
$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$ für unendlich viele, also für mindestens ein $n \geq n_0$.
Also konvergiert f_n nicht gleichmäßig auf M gegen f

Bem: (.) Es kann sein dass f_n trotzdem auf M glm konv,
nur eben nicht gegen f ???????

b) Untersuche die untenstehende Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jeweils in den Intervallen $I_1 = [0,1]$ und $I_2 = [1,2]$ auf gleichmäßige Konvergenz:

$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $x \in R$, $n \in N$.

//***D4.2.4*** *(2350) (Körper: K, z.B. R, C)*
//● ● *Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion*

// *$f: D \to K$, wenn gilt $\forall$ $z \in D$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N_{(\varepsilon,z)}$: $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall$ $n > N_{(\varepsilon,z)}$*
// *Schreibweise: $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z \in D$*
//*Andere Formulierung:*
// *Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent, falls für*
// *jedes $z \in D$ die Folge $(f_n(z))$ konvergent ist. Ist dies der Fall, so*
// *heißt $f: D \to K$, mit $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z \in D$, die Grenzfunktion der Folge.*
//● ● ● *Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls*

// *sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls*
// *weiter gilt: $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N \in R_+$ $\forall$ $n \in N$ $\forall$ $z \in D: n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

Lös: #$f(x) =$ #$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ $\forall$ $x \in R$ punktweise Konv.

(.) f_n konvergiert nicht glm auf $I_1 = [0,1]$, denn sonst müßte gelten:
$\exists$ Funktion $f: [0,1] \to R$ mit $f_n \to f$ glm auf $I_1 \Rightarrow$
$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall$ $x \in I_1$.
Aber mit $x_n = 1/n$ gilt

$$|f_n(x_n) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = 1/2 =: \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \; n \in N \Rightarrow$$

(f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergent (nach (a))

(..) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ konv glm auf $I_2=[1,2]$ gegen $f\equiv 0$

(genauer: $f: I_2 \to \mathbb{R}$, $f(x)=0 \quad \forall \quad x\in I_2$),
denn zu $\varepsilon>0$ bel fest wähle $n_0=[2/\varepsilon]+1 \Rightarrow$

$$|f_n(x_n) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{x\in[1,2]}{\leq} \frac{n*2}{1+n^2 1^2} \leq \frac{n*2}{0+n^2} = \frac{2}{n} \leq 2/n_0 < \varepsilon \quad \forall \; n\geq n_0, \quad \forall \; x\in I_2.$$

A4.2.9 Punktweise, gleichmäßige Konvergenz? h_n: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto \left[\frac{x}{n}\right]$

//**S1.5.15**(759)
//1.) $\forall$ $a\in\mathbb{R}$ $\exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists$ $[a]\in\mathbb{Z}$ mit
// $[a]\leq a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in\mathbb{Z} \mid n\leq a\}$

Lös: $h(x) \underset{n\to\infty}{=} \begin{cases} 0, \text{falls } x\geq 0 \\ -1, \text{falls } x<0 \end{cases} \Rightarrow h_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} h \Rightarrow h_n$ konvergiert punktweise

Für n fest: $|h_n(x)-h(x)| \underset{\text{Wahl } x}{>} \varepsilon \quad \forall \; \varepsilon>0$ h_n konvergiert nicht glm

\# Bsp n=10, $|h_{10}(x)-h(x)| = \left| \begin{cases} 0 \mid 0\leq x<10 \\ >1 \mid 10\leq x \\ -1 \mid -1\leq x<0 \\ <-1 \mid x<-1 \end{cases} - \begin{cases} 0, \text{falls } x\geq 0 \\ -1, \text{falls } x<0 \end{cases} \right| \underset{0\leq x=20}{=} |2-0|=2 \Rightarrow$

\# $\exists$ $0<\varepsilon<2$: $|h_{10}(x)-h(x)|>\varepsilon \Rightarrow$

\# $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N_{(\varepsilon)}\in\mathbb{N}$ $\forall$ $n>N_{(\varepsilon)}$ $\underset{\text{nicht}}{\forall}$ $x\in X$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

D4.2.5(2355)

- Geg beliebige Menge $D\subset \mathbb{K}$, sowie Funktionenfolge $g_k:D\to\mathbb{K}$ $\forall$ $k\in\mathbb{N}$. Dann nennen wir $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ eine Funktionenreihe auf D.

  Bsp Potenzreihen

- • Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ heißt auf D punktweise konvergent,

---

  falls $\forall$ $z\in D$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ konvergent ist und die Grenzfunktion f ist dann durch $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ $\forall$ $x\in D$ gegeben.

- • • Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ heißt auf D gleichmäßig konvergent,

  falls sie punktweise konvergiert(gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter gilt: $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ $\forall$ $z\in D$:$n\geq N \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n} g_k(z)-f(z)|<\varepsilon$.

  Also ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ äquivalent mit der gleichmäßigen Konvergenz der Folge ihrer Partialsummenfolge

Andere Formulierung:

Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf X gegen S:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(z)=S$ $\forall$ $x\in X$ $(S_n:=f_1+f_2+\ldots f_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\rightrightarrows}} S)$

Andere Formulierung

$(\sum_{k=1}^{n} f_k(z))_{n=1}^{\infty}$, f_k: $D\to\mathbb{K}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen f: $D\to\mathbb{K}$ wenn die

Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h.

$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{N}$ $\forall$ $n\geq N$ $\forall$ $x\in D$: $|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)|<\varepsilon$

Bem: • Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

Gleichmäßige Konvergenz $\not\Leftarrow$ Konvergenz

• • Bei glm Konvergenz gilt $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_{1(\varepsilon)}:\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall$ $n>n_{1(\varepsilon)}$

d.h. $\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\underset{n\to\infty}{\underbrace{\rightrightarrows}} 0$

Zu $\varepsilon>0$ $\exists$ $x_n:\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq|f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ $\forall$ $n>n_{0(\frac{\varepsilon}{2})}$

Bsp: • $f_n(x)=x^n$ auf [0,1) konvergiert punktweise, aber nicht glm gegen 0,

weil $\underbrace{\sup}_{x\in[0,1)}|x^n-0|=1\not\to 0$

•• $f_n(x)=\frac{x^n}{n}$ auf [0,1) konvergiert glm gegen 0: $\underbrace{\sup}_{x\in[0,1)}|\frac{x^n}{n}-0|=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0$

S4.2.4(2356)
Funktionenfolge Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz
Vor:Sei $D\subset\mathbb{K}$ (z.B $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) $f_n:D\to\mathbb{K}$ für $n\in\mathbb{N}$ gegeben.
Beh:$(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf D (gegen Funktion $f(z):=D\to\mathbb{C}$)
$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$ $\forall$ $n,m\geq n_0(\varepsilon)$ $\forall$ $z\in D$

//**D4.2.4(2351)**
//Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls sie
// punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter
// gilt: $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ $\forall$ $z\in D$:$n\geq N$ $\Rightarrow$ $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.
Bew:"$\Rightarrow$„ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ $\forall$ $n\leq n_0$ und $\forall$ $z\in M$: $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ $\Rightarrow$
$|f_n(z)-f_m(z\ n_0)|\leq|f_n(z)-f(z)|+|f(z)-f_m(z)|<2\varepsilon$ $\forall$ $n,m\geq n_0(\varepsilon)$
und $\forall$ $z\in D$
„$\Leftarrow$„$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$:$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$ $\forall$ $n,m\geq n_0(\varepsilon)$ und $\forall$ $z\in M$.
Wähle festes $z_0\in M$ $\Rightarrow$ $|f_n(z_0)-f_m(z_0)|<\varepsilon$ $\forall$ $n,m\geq n_0(\varepsilon)$
$\Rightarrow$ $(f_n(z_0))_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchy Folge $\Rightarrow$ $\exists$ $\lim_{n\to\infty}f_n(z_0)=:f(z_0)\in\mathbb{C}$ $\Rightarrow$
$\exists$ $f(z):D\to\mathbb{C}$, $f_n(z)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}f(z)$ $\forall$ $z\in D$.
$|f_n(z)-f_m(z)|\underset{m\to\infty}{\rightrightarrows}|f_n(z)-f(z)|\leq\varepsilon$, $\forall$ $n\leq n_0(\varepsilon)$, $\forall$ $z\in D\underset{D4.5.1}{\Rightarrow}$Beh

Bem: Eine Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig auf I $\Leftrightarrow$

$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$:$|\sum_{k=n}^{n+p}f_k(x)|<\varepsilon$ $\forall$ $n\geq n_1(\varepsilon)$ $\forall$ $p\geq1$, $\forall$ $x\in I$

•• Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty}g_k$ ist genau dann auf D gleichmäßig konvergent,

wenn $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n,m\in\mathbb{N}$ $\forall$ $x\in D$:$m\geq n\geq N$ $\Rightarrow$ $|\sum_{k=n}^{m}g_k(x)|<\varepsilon$.
Bew: Wird analog wie im Fall von Zahlenfolgen und -reihen gezeigt.
Bem:Seien $f_n(z)$: $M\to\mathbb{C}$ $n\in\mathbb{N}$, gegeben.$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig uf M

$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $\left|\sum_{\nu=m+1}^{n}f_\nu(z)\right|<\varepsilon$ $\forall$ $n>m\geq n_0(\varepsilon)$ und

$\forall$ $z\in M$. Man wende S4.5.1 auf $F_n(z):=\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(z)$ $n\in\mathbb{N}$, an.

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = |\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ikx}}{k}| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} e^{ikx} \sum_{\nu=k}^{\infty} (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1})| = |\sum_{\nu=k}^{\infty} (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}) \sum_{k=n+1}^{n+p} e^{ikx}| =$

$|\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}) \frac{2}{|e^{ix}-1|} | \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \frac{2}{|e^{i\delta}-1|} |$ für $x \in [\delta, \pi/2]$

Facit: glm konvergent auf $[\delta,\pi/2]$ $\forall$ $\delta>0$, aber nur punktweise auf $(0,\pi/2]$

#Eigener Versuch:

*//**S1.7.2**(903) Vor: $a,b \in C$, $n \in N_0$, Aussage: 1.)* $\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1, & a=1 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases}$ $|\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}| = |$

$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} x \frac{1}{k} | = |(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}) x \sum_{\nu=k}^{\infty} (\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}) | = |(\sum_{\nu=k}^{\infty} (\frac{1}{\nu(\nu+1)})) x (\sum_{k=0}^{n-1} ((e^{ix})^{k+1}) | =$

$|(\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)}) x \frac{1-(e^{x})^{n}}{1-e^{ix}} | \leq | \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} | x | \frac{(e^{ix})^{n}-1}{e^{ix}-1} | = | \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} | x \frac{|(e^{ix})^{n}+(-1)|}{|e^{ix}-1|}$

=

$\leq | \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} | x \frac{|(e^{ix})^{n}|+|(-1)|}{|e^{ix}-1|} = | \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} x \frac{2}{|e^{ix}-1|} | \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$

$\leq \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \frac{2}{|e^{i\delta}-1|} |$ für $x \in [\delta,\pi/2]$ $\forall$ $\delta>0$ (d.h. $|e^{i\delta}-1| \neq 0$)

Facit: glm konvergent auf $[\delta,\pi/2]$ $\forall$ $\delta>0$, aber nur punktweise auf $(0,\pi/2]$

A4.5.10 Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent?
Finde maximale Intervalle, auf denen die Reihen gleichmäßig konvergieren.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(x/n)$

//**S3.1.4**(1605) Bsp 3, Seite 1608//

$$//\left.\begin{array}{l} x - x^3/6 \le \sin x \le x - x^3/6 + x^5/120 \\ 1 - x^2/2 \le \cos x \le 1 - x^2/2 + x^4/24 \end{array}\right\} \forall\ 0<x \le 3//$$

//**S2.2.2**(1301)

//Bsp:1.) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ nicht konvergent

// $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N} \underset{n\to\infty}{\to} 2 \Rightarrow$ konvergent

\# $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $p>2$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow 1/k^p < 1/k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 1/k^p < \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 1/k^p$ konv

Lös:S3.1.4 Bsp 3: $\frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} \le \sin(x/n) \le \frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} + \frac{x^5}{120n^5}$

S2.2.2 Bsp1.): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\to\ \infty}$ bestimmt divergent $\underset{x>0}{\to} +\infty$, $\underset{x<0}{\to} -\infty$.

Siehe oben: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{6n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^5}{120n^5}$ $\underbrace{\textit{konvergieren}}_{S2.2.2\ Bsp1.)}$ $\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/n) = +\infty\ (x>0),\ -\infty\ (x<0)$.

Für $x=0$: $\sin(x/n) = \sin 0 = 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/n) = 0$ konvergent für $x=0$

\# $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $|\frac{x}{n}| < 3\ \ \forall\ n > n_0$: $\frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} \le \sin \frac{x}{n} \le \frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} + \frac{x^5}{120n^5}$

\# $-\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} \ge -\sin \frac{x}{n} \ge -\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} - \frac{x^5}{120n^5} \Rightarrow -\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} \ge \sin -\frac{x}{n} \ge -\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} - \frac{x^5}{120}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-e^{nx})$

*//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//*
//Für z,w∈C, x∈R gilt//

//5.) $\forall\ x\in R\ \exists\ exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=\frac{1}{\exp(-x)},\ exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$ *//*

*//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//*

//7.) $1+x\leq exp(x)\ \ \forall\ x\in R,\ exp(x)\leq\frac{1}{1-x}\ \ \forall\ x<1$*//*

//1.) $(.)exp(0)=e^0=1\quad(..)exp(x)>0\ \ \forall\ x\in R,$

// **S3.1.1**(1601) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergent $\forall\ z\in K$ mit $|z|>1$,

// konvergent $\forall$ z, $|z|<1$: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}\ \ \forall\ |z|<1$.

Lös: $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-e^{nx}) \underset{S2.3.18\,5.)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(e^x)^n}}$, $y\geq 0,\ e^y\geq 1+y,\ e^x>0\ \ \forall\ x\in R,\ (e^x)^n>0\ \ \forall\ n\in N$.

$e^{(e^x)^n}\geq 1+(e^x)^n\geq(e^x)^n \Rightarrow \frac{1}{e^{(e^x)^n}}\leq\frac{1}{(e^x)^n}$.

- $x>0 \underset{x>0\ \&\ e^x\geq 1\Rightarrow e^x>1}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{e^x}\right)<1 \underset{S3.1.1}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)^n$ konvergiert punktweise.
- $x\leq 0 \Rightarrow e^x\leq 1 \Rightarrow (e^x)^n\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{(e^x)^n}}\geq 1/e\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{(e^x)^n}}$ also keine Nullfolge

  $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{(e^x)^n}}$ divergiert

Noch zu untersuchen gleichmäßige Konvergenz...x>0 bzw $x\in[\delta,\infty]\ \ \forall\ \delta>0$

*//**S4.2.4**(2356) Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz//*

// Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ *ist genau dann auf D gleichmäßig //*

// konvergent, wenn $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbb{N}\ \forall\ x\in D: m\geq n\geq N \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n}^{m} g_k(x)\right|<\varepsilon$*.//*

//Bem:Seien $f_n(z): M\to\mathbb{C}\ n\in\mathbb{N}$*, gegeben.*

// $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *konvergiert gleichmäßig auf M* $\Leftrightarrow$

// $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ *(unabhängig von* $z\in M$*)//*

// *mit* $\left|\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} f_\nu(z)\right|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_0(\varepsilon)$ *und* $\forall\ z\in M$*. //*

*//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//*

//7.) $1+x\leq\exp(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \exp(x)\leq\dfrac{1}{1-x}\ \ \forall\ x<1$*//*

*//**S1.5.6** (715) Vor:*$x\in\mathbb{R},\ x\geq-1,\ n\in\mathbb{N}$ *Beh:*$(1+x)^n\geq 1+nx$*//*

// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

*//**S3.1.2** (1602)Rechenregeln für unendliche Reihen//*

//Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen.//

// (siehe auch Rechenregeln für unendliche Reihen S3.1.2)//

// *Sei*$(z_n)\subset\mathbb{C}$. $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergiert* $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ *mit//*

// $\left|\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} z_\nu\right|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$*.(d.h.* $|S_n-S_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$*).//*

Beh: $\forall\ \delta>0$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\exp(-e^{nx})$ (.)gleichmäßig konvergent auf $[\delta,\infty)$?

(..) aber nicht auf ganz $\mathbb{R}_+$?

(.) S4.2.4 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz erfüllt?

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in[\delta,\infty),\ n,m\geq N \underbrace{\Rightarrow}_{S4.5.1} \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{e^{(e^x)^k}}\right|<\varepsilon$$

$$x\geq\delta>0\ \Rightarrow\ e^x\geq e^\delta \underbrace{\geq}_{S2.3.18\,7.)} 1+\delta\ \Rightarrow\ (e^x)^n\geq(1+\delta)^n \underbrace{\geq}_{S1.5.6)\,-1\leq 0<\delta} 1+n\delta\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e^{(e^x)^n}}<\frac{1}{e^{1+n\delta}}<\frac{1}{e^{n\delta}}<\underbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{e^\delta}_{>1}}\right)}_{=q<1}^{n}\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{e^\delta}\right|<1\ \Rightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^\delta}\right)^k \text{ konvergent } \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2\,Bem:1.)}$$

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{e^\delta}\right)^n\right|<\varepsilon \text{ für } m,n\geq N(\varepsilon)$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig, wähle $N(\varepsilon):\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{e^\delta}\right)^k\right|<\varepsilon$ für $m,n\geq N(\varepsilon)$

$$\Rightarrow\ \forall\ m,n\geq N(\varepsilon):\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{(e^{e^k})^n}\right|\leq\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{\varepsilon^\delta}\right)^n<\varepsilon$$

(..)Z.z. $\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ N\in\mathbb{R}_+,\ \exists\ n,m\in\mathbb{N},\ \exists\ x\in\mathbb{R}_+,\ m,n\geq N,\ \left|\sum\limits_{k=n}^{m}\frac{1}{(e^{e^x})^k}\right|>\varepsilon$.

Wähle $\varepsilon=1/27$. Sei $N\in\mathbb{R}_+$, beliebig, $m=n=N$, $x=1/N$

$$\Rightarrow\ \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{(e^{e^x})^k}\right|=\frac{1}{(e^{e^x})^N}=\frac{1}{(e^{e^{1/N}})^N}=1/e^e>1/27,\ e<3,\ e^e<e^3<3^2\neq 27$$

S4.2.5(2361) Majorantenkriterium von Weierstrass
Vor:Sei $D\subset\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) und $f_n: D\to\mathbb{C}$ für $n\in\mathbb{N}$ gegeben.

Sei $|f_n(z)|\le a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ & $\forall$ $z\in D$ & $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.

Aussage: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sind gleichmäßig auf M konvergent.
//**S4.2.4**(2356)Vor:Sei $D\subset\mathbb{K}$, $f_n: D\to\mathbb{K}$ für $n\in\mathbb{N}$ gegeben.
//Beh: $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf D (gegen Funktion $f(z):=D\to\mathbb{K}$)

// $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in D$)
// mit $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$ $\forall$ $n,m\ge n_0(\varepsilon)$ $\forall$ $z\in D$

Bew: $\left|\sum_{\nu=m+1}^{n} f_\nu(z)\right|\le \sum_{\nu=m+1}^{n} |f_\nu(z)|\le \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu<\varepsilon$ $\forall$ $n>m\ge n_0(\varepsilon)$ $\underset{S4.2.4}{\Rightarrow}$ Beh.

Andere Formulierung:

Vor: (f_n), $f_n: I\to\mathbb{R}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\ge 0$, $\ast$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k<\infty$, $\ast\ast$ $|f_k(x)|\le a_k$ $\forall$ $x\in I$ $\forall k$

Aussage: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist gleichmäßig konvergent.

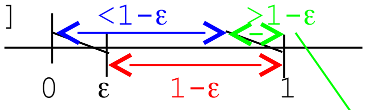
Bew: $\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|\le \sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_k$ $\forall$ $x\in I$ $\underset{S4.2.4}{\Rightarrow}$ Beh

Bsp: • $g_k(x)=x^k$ $\Rightarrow$ $|x^k|\le(1-\delta)^k$
• • $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$, $\alpha>1$ glm Konv auf $\mathbb{R}$ ($\frac{1}{k^\alpha}$ Majorante)

A4.2.11 Zeige: Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x)=x^n$ ist nicht gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$.
Lös:Wann gilt $|x|^n<\varepsilon$ für $0\le x<1$...x=1 ?..$|x|^n=1$...$\not<$ ε nicht glm konv

A4.2.12 Zeige: Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x)=(1-x)x^n$ ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall [0,1]

Lös:



#Falls $x>1-\varepsilon \Rightarrow \varepsilon>1-x \Rightarrow f_n(x)=(1-x)\overbrace{(x)}^{\le 1}{}^n \le \overbrace{1-\underbrace{x}_{>(1-\varepsilon)}}^{<\varepsilon} < \varepsilon$,

#Falls $x<1-\varepsilon$ d.h. $0<\varepsilon<1-x \Rightarrow f_n(x)=(1-x)x^n<(1-\underbrace{x}_{\in[0,1]})(1-\varepsilon)^n \underbrace{\le}_{1-x\le 1} (1-\varepsilon)^n$

$$|f_n(x)| \le \begin{cases} f_n(x) \le (1-x) < \varepsilon & \textit{für } x>1-\varepsilon \textit{ unabhängig von } n \\ f_n(x) \le (1-\varepsilon)^n < \varepsilon \;\; \forall n \ge N & \textit{für } 0<x<1-\varepsilon \end{cases}$$

A4.2.13 Zeige: Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall [0,1]

Lös: glm Konv aus Majorantenkriterium ... $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konv

A4.2.14

a) Finde die maximalen Intervalle, auf denen die Funktionenfolge $f_n(x)=x*\exp(-nx^2)$ punktweise bzw gleichmäßig konvergiert.

//**D4.2.4**(2300) Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$, $f_n:M\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$//
//Aussage: Die Funktionsfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig
// auf M gegen $f(z):M\to\mathbb{C}$: $\Leftrightarrow$
//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabh. von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n\ge n_0(\varepsilon)\ \ \forall\ z\in M$.
*//**S2.3.18**(1409) Für $x\in\mathbb{R}$ gilt 7.)(1411) $1+x\le\exp(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$//*
*//**S1.5.6** (715) Vor: $x\in\mathbb{R}$, $x\ge-1$, $n\in\mathbb{N}$ Beh: $(1+x)^n\ge 1+nx$//*
// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

Lös: ● punktweise konvergent

$$f_n(x)=x\frac{1}{e^{nx^2}}=x\left(\frac{1}{\underbrace{e^{x^2}}_{=q}}\right)^n,\quad q^n \underbrace{\overset{|q|<1}{\longrightarrow}}_{n\to\infty} 0,\quad q^n \underbrace{\overset{|q|=1}{\longrightarrow}}_{n\to\infty} 1,\quad q^n \underbrace{\overset{|q|>1}{\longrightarrow}}_{n\to\infty} \infty,$$

$$\left|\frac{1}{e^{x^2}}\right|<1 \Rightarrow f_n(x) \text{ konvergent: } \frac{1}{e^{x^2}} \underbrace{\overset{x^2>0}{\le}}_{e^{x^2}\ge 1} 1\quad \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\ne 0} f_n(x)=x\frac{1}{e^{nx^2}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} x*0 \text{ konvergiert punktweise } \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ gegen } 0$$

$$\frac{1}{\underbrace{e^{\overset{x^2}{=0}}}_{=1\ \textit{für}\ x=0}}=1$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x=0} f_n(x)=x=0*1\ \frac{1}{e^{nx^2}} \text{ konvergiert gegen } 0$$

$$f_n(x)=x\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n=0\quad \forall\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f_n \text{ konvergiert punktweise } \forall\ x\in\mathbb{R}$$

● ● gleichmäßig konvergent

*//**S2.3.18**(1409) Für $x\in R$ gilt7.)(1411) $1+x\le \exp(x)$ $\forall$ $x\in R$//*

*//**S1.5.6** (715) Vor:$x\in R$, $x\ge -1$, $n\in N$ Beh:$(1+x)^n \ge 1+nx$//*

// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

Beh.:f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent

Bew:Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \forall\ x\in\mathbb{R}:\ n\ge N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \underset{\text{Seite 2362}}{\Rightarrow} |f_n(x)|<\varepsilon$

$$|f_n(x)|=\left|x\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n\right|=|x|\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n$$

da $e^{x^2} \underset{S2.3.18}{\ge} 1+x^2>0$, $(e^{x^2})^n \ge (1+x^2)^n \underset{S1.5.6,\ x^2\ge -1}{\ge} 1+nx^2>1$

$$|f_n(x)|=|x|\underbrace{\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n}_{\le 1} \le \begin{cases} |x| \ \text{für } x=0 \\ \dfrac{|x|}{1+nx^2}=\dfrac{|x|}{1+n|x||x|}=\dfrac{1}{\frac{1}{|x|}+n|x|}\le\dfrac{1}{n|x|} \ \text{für } x\ne 0\,. \end{cases}$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $N=1/\varepsilon^2$, dann gilt $\forall\ n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge N$:

$$|f_n(x)|\le\begin{cases} |x|<\varepsilon \ \ \forall |x|\le\varepsilon \\ \dfrac{1}{n|x|}\underset{|x|>\varepsilon}{<}\dfrac{1}{n\varepsilon}\underset{n\ge 1/\varepsilon^2}{\underbrace{\le\varepsilon}}, \end{cases},\ \forall\ x\in\mathbb{R}\ ,n>1/\varepsilon^2$$

$\Rightarrow$ f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent

b) Zeige: Wenn eine Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, so muss für jede Folge (x_n) aus D gelten: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Bew: $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbb{R}_+.\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \forall\ x\in\mathbf{D}:\ n\ge\tilde{N}:\#|f_n(x)-f(x)|=\#|f_n(x)|<\tilde{\varepsilon}$

Beh. $\forall\ (x_n)\subset D$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Vor. $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbb{R}_+:\forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in D,\ n\ge\tilde{N} \Rightarrow |f_n(x_n)|<\tilde{\varepsilon}$.

Beh: $\forall\ (x_n)\in D$ gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\ge N$: $|f_n(x_n)|<\varepsilon$.

Sei $x_n\subset D$ beliebig. Sei $\varepsilon>0$. Setze $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon$, bestimme $\tilde{N}$, setze $N=\tilde{N}$, dann gilt $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in D,\ n\ge N$: $|f_n(x)|<\varepsilon \Rightarrow$ also ist erst recht $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in D,\ n\ge N \Rightarrow |f_n(x_n)|<\varepsilon$.

A4.2.15

a) Zeige: Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall [0,1]

Lös: glm Konv aus Majorantenkriterium ... $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konv

b) Zeige: Wenn eine Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, so muss für jede Folge (x_n) aus D gelten: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Bew: $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbf{R}_+.\ \forall\ n\in\mathbf{N},\ \Rightarrow\ \forall\ x\in D:\ n\geq\tilde{N}: \#|f_n(x)-f(x)|=\#|f_n(x)|<\tilde{\varepsilon}$

Beh. $\forall\ (x_n)\subset D: \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Vor. $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbf{R}_+: \forall\ n\in\mathbf{N},\ \forall\ x\in D,\ n\geq\tilde{N}\ \Rightarrow\ |f_n(x_n)|<\tilde{\varepsilon}$.

Beh: $\forall\ (x_n)\in D$ gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbf{R}_+\ \forall\ n\in\mathbf{N},\ n\geq N: |f_n(x_n)|<\varepsilon$.

Sei $x_n\subset D$ beliebig. Sei $\varepsilon>0$. Setze $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon$, bestimme $\tilde{N}$, setze $N=\tilde{N}$, dann gilt $\forall\ n\in\mathbf{N},\ \forall\ x\in D,\ n\geq N: |f_n(x)|<\varepsilon\ \Rightarrow$ also ist erst recht $\forall\ n\in\mathbf{N},\ \forall\ x\in D,\ n\geq N\ \Rightarrow\ |f_n(x_n)|<\varepsilon$.

c) Zeige, dass die Funktionenfolge $f_n(x)=n^2x(x-2)(1-x)^n$ auf $0\leq x\leq 2$
(.) punktweise aber (..) nicht gleichmäßig konvergent ist.
Anl.: Finde eine Folge (x_n) aus dem Intervall (0,2), welche die Bedingung aus (b) nicht erfüllt.

*//**S1.5.6** (715) Vor: $x\in R$, $x\geq -1$, $n\in N$ Beh: $(1+x)^n\geq 1+nx$//*
// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

Lös: (.) Protokoll nicht verstanden, eigener Versuch beweist (.), kann falsch sein

\# • $x=0,1,2\ \Rightarrow\ f_n(x)=0$

\# •• $0<x<1$: $n*\underset{\neq 0}{x}\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \infty$, $n^2*\underset{\neq 0}{x}\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \infty$, $(\underset{0<x<1}{x}-2)<0$, $(1-\underset{0<x<1}{x})^n=(\underset{0<x<1}{1-x})^n>0$,

\# $(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n<0$, $\underset{0<x<1}{x}(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n<0$,

\# $n^2*\underset{0<x<1}{x}(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n\ \underset{n\to\infty}{\to}\ -\infty$,

\# ••• $1<x<2$: $(1-\underset{1<x<2}{x})<0$, $(1-\underset{1<x<2}{x})^n\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \pm\infty$, $n^2*\underset{0<x<1}{x}(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n\ \underset{n\to\infty}{\to}\ \pm\infty$

\# $f_n(x)$ punktweise konvergent in 0,1,2

(..) $x_n=\frac{1}{n}\in[0,2]$: $f_n(1/n)=n^2\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-2)(1-\frac{1}{n})^n\ \Rightarrow\ \underbrace{(1-2n)}_{\to-\infty}\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}_{\to 1}$ divergent $\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz