6.5 (3500) **Die Partialbruchzerlegung**

Auf der einen Seite garantiert der 2. Hauptsatz zu jeder stetigen Funktion f die Existenz einer Stammfunktion F, andererseits gibt er keinen Hinweis darauf, wie man bei F explizit berechnen kann. Tatsächlich ist es so, dass man z.B. für $f(x)=\exp(-x^2)$ keine Stammfunktion durch die uns bekannten Funktionen ausdrücken kann. In diesem Abschnitt wollen wir allerdings zeigen, dass man beliebige rationale Funktionen in einfache Ausdrücke zerlegen kann, für die man dann einzelne Stammfunktionen findet. Hierzu benötigen wir einige Hilfsmittel:

S6.5.1 (3500) Fundamentalsatz der Algebra
Jedes nicht konstante Polynom $P\in\mathbb{C}[z]$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

*//**D1.3.2** (504) Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ heißt vollständig //*
// (bezüglich <): $\Leftrightarrow$ $\forall$ $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T\in\mathbb{K}$.//
//Bem: $\mathbb{K}=(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ ist vollständig: $\Leftrightarrow$ Jede nach //
// unten beschränkte Menge $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ besitzt ein Infimum $\inf T$ in $\mathbb{K}$//
*//**D2.1.1** (1200)*
// 2.) $U^{\varepsilon}(z_0):=\{z\in C: |z-z_0|<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0, z, z_0\in C)$ Kreisscheibe heißt//
// ε-Umgebung von z_0 in C.
*//**S1.9.1''''** (1105) $|z|\geq\rho:=2\frac{|a_0|+|a_1|+...+|a_n|}{|a_n|}$ $\vee$ $|x|\geq(2\underline{G}/a_n|)^{1/n}$, $\underline{G}\in R_+\Rightarrow$*
//$|P(z)|\geq$ $\underline{G}$//
*//**S2.2.4** (1307) Bolzano Weierstraß (BW)//*
// Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge//
*//**S4.3.2** (2403) Folgenstetigkeit//*
// Genau dann ist $f=D\rightarrow\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge//
// (x_n) in D mit $x_n\rightarrow x_0$ auch $f(x_n)\underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty}f(x_0)$ gilt.//

Bew: Seien $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, mit $n\in\mathbb{N}$, $a_k\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$, $\underbrace{f(z)}_{reellwertig,\,stetig}=|P(z)|\geq 0$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2\,Bem}$ $\exists$ $\mu=\inf\{f(z): z\in\mathbb{C}\}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.1''''}$ $\exists$ $\underline{G}>0$: $f(z)>\mu$ für $|z|>\underline{G}$ $\Rightarrow$

$\mu=\inf\{f(z): z\in\mathbb{K}\}$, $K:=\{z\in\mathbb{C}: |z|\leq\underline{G}\}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(z_n)\in U_{\underline{G}}(0)$: $\lim_{n\rightarrow\infty} f(z_n)=\mu$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.4}$ $\exists$ konvergente $\left(z_{n_m}\right)\subset(z_n)$: $\lim_{m\rightarrow\infty}\left(z_{n_m}\right)=z_0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.2}$ $f(z_0)=\mu$

Annahme $\mu>0$ $(\mu\neq 0)$ $\Rightarrow$ $\mu=f(z_0)=|P(z_0)|>0$ also $P(z_0)\neq 0$ $\Rightarrow$

$Q(z)=P(z+z_0)/\underbrace{P(z_0)}_{\neq 0}$ gesetzt $\Rightarrow$ $\gamma(Q)=n$: $|Q(z)|\geq Q(0)=1$.

Sei $Q(z)=1+\sum_{k=m}^{n} b_k z^k\geq Q(0)=1$, mit $b_m\neq 0$, $m\geq 1$.

Setze $b_m=\rho e^{i\Phi}$ und wähle Variable $z=re^{-i(\Phi+\pi)/m}$, $\rho, r\in\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$

$z^m b_m=(re^{-i(\Phi+\pi)/m})^m\rho e^{i\Phi}=(r^m e^{-i(\Phi+\pi)})\rho e^{i\Phi}=r^m e^{-i\pi}\rho=r^m(-1)\rho=-r^m\rho<0$ $\Rightarrow$

$|Q(z)|\leq 1-r^m\rho+\sum_{k=m+1}^{n}|b_k|r^k\underbrace{\leq}_{*}1$ falls r genügend klein ist $\Rightarrow$

Widerspruch zu $|Q(z)|\geq 1$ # $\Rightarrow$ Annahme $\mu>0$ falsch $\Rightarrow$ $\mu=0$#

* $-r^m\rho+\sum_{k=m+1}^{n}|b_k|r^k=\underbrace{r^m}_{>0}(-\rho+\sum_{k=m+1}^{n}|b_k|r^{k-m})$

$b=\max\{|b_k|:m+1\le k\le n\} \Rightarrow b\sum_{k=m+1}^{n} r^{k-m}=b\sum_{k=1}^{n-m} r^k \ge \sum_{k=m+1}^{n} |b_k|r^{k-m}=\sum_{k=1}^{n-m} |b_k|r^k$

Zu beweisen $\exists$ r: $\rho>b\sum_{k=m+1}^{n} r^{k-m}\ge \sum_{k=m+1}^{n} |b_k|r^{k-m} \Rightarrow \rho>\sum_{k=m+1}^{n} |b_k|r^{k-m}$ für kleine r

$\underbrace{\Rightarrow}_{r=1/k,k\ge1,k\in N}$ Zu beweisen $\exists$ k: $\rho/b=\rho' > \sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{k-m}=\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{1}{k}\right)^{k}=S$

$S*\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{1}{k}\right)^{k+1} \Rightarrow S-S*\frac{1}{k}=S(1-\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{1}{k}\right)^{k}-\sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{k}\right)^{n-m+1}$

$=\frac{1}{k}(1-\left(\frac{1}{k}\right)^{n-m}) \Rightarrow$

$S=\dfrac{\frac{1}{k}(1-(\frac{1}{k})^{n-m})}{1-\frac{1}{k}}=\dfrac{\frac{1}{k}(\frac{k^{n-m}-1}{k^{n-m}})}{\frac{k-1}{k}}=\dfrac{k^{n-m}-1}{k^{n-m}(k-1)}=\dfrac{k^{n-m}-1}{k^{n-m}(k-1)}=1-\dfrac{\overbrace{\frac{1}{k^{n-m}}}^{\xrightarrow[k\to\infty]{}0}}{k-1}\underbrace{\Rightarrow}_{k\to\infty}0 \Rightarrow S\underbrace{\le}_{k\to\infty}\rho'$

Andere Formulierung:

//**S2.2.4**(1307) Bolzano Weierstraß (BW)(siehe auch S2.4.1)//

// Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge//

//S**2.4.1**(1502)Bolzano Weierstrass (BW)//

//Vor:Sei $(a_n)\subset \mathbf{R}$ beschränkt//

//Beh:(a_n) hat mindestens einen HW $a\in\mathbf{R}$ und eine gegen a konvergente//

// Teilfolge.$(-k\le a_n\le k\ \forall\ n\in\mathbf{N})$//

$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $n\in\mathbf{N}$, $a_k\in\mathbf{C}$, $a_n\ne0$, $f(z)=|P(z)|\ge0$, $\mu=\inf\{f(z):z\in\mathbf{C}\} \Rightarrow$

$f(z)\ge|a_n|r^n-\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|r^k\to\infty$ für $r=|z|\to\infty \Rightarrow \exists\ R>0:f(z)>\mu$ für $|z|>R \Rightarrow$

$\exists$ Folge (z_n) in der Kreisscheibe um 0 mit Radius R: $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\mu$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1}$ Folge besitzt konvergente Teilfolge, etwa mit Grenzwert z_0

und wegen der Stetigkeit von f folgt hieraus $f(z_0)=\mu \underbrace{\Rightarrow}_{\mu>0}$

$Q(z)=(P(z+z_0)/P(z_0) \Rightarrow \gamma(Q)=n: |Q(z)|\ge Q(0)=1$

Sei $Q(z)=1+\sum_{k=m}^{n} b_k z^k$, $b_m\ne0$, $m\ge1$. Setze $b_m=\rho e^{i\phi}$ und wähle $z=re^{-i(\phi+\pi)/m}$ also

$z^m b_m=-r^m\rho<0 \Rightarrow |Q(z)|\le1-r^m\rho+\sum_{k=m+1}^{n}|b_k|r^k<1$ falls r genügend klein ist $\Rightarrow$

Widerspruch zu $|Q(z)|\ge1$.

S6.5.2(3502)Zu jedem $P\in\mathbb{C}[z]$ vom Grade $n\geq 1$ existieren verschiedene
$z_1,...z_m\in\mathbb{C}$, $\nu_1,... \nu_m\in\mathbb{N}$: $\nu_1+...+\nu_m=n$ und ein $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$:
(*) $P(z)=a_n(z-z_1)^{\nu_1}...(z-z_m)^{\nu_m}\quad\forall\ z\in\mathbb{C}$
#Bem:Im Beweis wird S6.5.1 verwendet. Der verlangt komplexe Nullstellen,
deshalb $z_1,...z_m\in\mathbb{C}$

*//**S1.9.1** (1103)//*
//Vor:Sei P einPolynom vom grad $n\geq 1.n\in N_0$//
//Beh:1.)$z_0\in C$ Nullst von P(z), so $\exists$ ein Polynom Q(z) mit grad(Q)=n-1//
//sodaß gilt $P(z)=(z-z_0)Q(z)\ \ \forall\ z\in C$//
//2.)P(z) hat max n Nullst in C, außer wenn es das Nullpolynom ist.//
Bew:Induktion über n
n=1: $P(z)=a_0+a_1z$, mit $a_1\neq 0\Rightarrow P(z)=a_1(z-z_1)$ mit $z_1=-a_0/a_1$.
n≥2: $\underbrace{\exists}_{S6.5.1}\ z_0\in\mathbb{C}$: $P(z_0)=0\underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.1}P(z)=(z-z_0)^{\nu}Q(z)$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\gamma(Q)=n-\nu$, $Q(z_0)\neq 0$.
#IH n: $P(z)=a(z-z_1)^{\nu_1}...(z-z_m)^{\nu_m}$
$\forall\ z\in\mathbb{C}\ z_1,...z_m\in\mathbb{C},\ \nu_1,...\nu_m\in\mathbb{N}$: $\nu_1+...+\nu_m=n$ und ein $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$
#$n\mapsto n+1$: $\underbrace{\exists}_{S6.5.1}z_\nu\in\mathbb{C}$: $P_{n+1}\underbrace{=}_{S1.9.1}(z-z_\nu)Q_n(z)$: $P_{n+1}(z_\nu)=0$,
$\gamma(Q_n)=n+1-1=n=\gamma(P)$, $Q_n(z_\nu)\neq 0$
Fall $z_\nu\notin\{z_1,...z_m\}$: $P_{n+1}=(z-z_\nu)Q_n(z)\underbrace{=}_{IH}a(z-z_1)^{\nu_1}...(z-z_m)^{\nu_m}(z-z_\nu)^1\underbrace{\Rightarrow}_{\nu=m+1}$
$P_{n+1}=a(z-z_1)^{\nu_1}...(z-z_m)^{\nu_m}(z-z_{m+1})^{\nu_{m+1}=1}$ mit
$z_1,...z_m,z_{m+1}$, $\nu_1,...\nu_m,\nu_{m+1}=1$, $\nu_1+...+\nu_m+(\nu_{m+1}=1)=n+1$

Fall $z_\nu\in\{z_1,...z_m\}$:Gewählt $z_\nu=z_1\Rightarrow P_{n+1}=(z-z_1)Q_n(z)\underbrace{=}_{IH}$
$a(z-z_1)^{\nu_1+1}...(z-z_m)^{\nu_m}=P_{n+1}$, $z_1,...z_m$, $\nu_1,...\nu_m$, $\nu_1+1+...+\nu_m=n+1$
Anwendung der Induktionshypothese liefert dann die Beh.

S6.5.3(3503) Zu jedem reellen Polynom $P\in\mathbb{R}[x]$ vom Grade $n\geq 1$ existieren verschiedene $x_1,\ldots x_\mu\in\mathbb{R}$, verschiedene $(a_1,b_1),\ldots(a_\nu,b_\nu)\in\overline{\mathbb{R}}^2$, eine reelle Zahl $a\neq 0$, sowie natürliche Zahlen $\nu_1,\ldots,\nu_\mu$, $\sigma_1,\ldots\sigma_\nu$ derart, dass folgendes gilt:

a) Es ist $\mu+2\nu=n$, wobei auch $\mu=0$ oder $\nu=0$ eintreten kann

b) $x^2-A_tx+B_t\neq 0,\ x\in\mathbb{R}\ \forall\ t=1,\ldots,\nu \Rightarrow A_t^2<4B_t$

c) Es gilt die Darstellung

(***) $P(x)=a(x-x_1)^{\nu_1}*\ldots*(x-x_\mu)^{\nu_\mu}(x^2-A_1x+B_1)^{\sigma_1}*\ldots*(x^2-A_\nu x+B_\nu)^{\sigma_\nu}\quad\forall\ x\in\mathbb{R}$

//(801)Eigenschaften der komplexen Zahlen//

//Für $z_1,z_2\in C$ gilt 3.) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ //

Bew: Sei $z_t, t\in\{1,2,\ldots\nu\}$,

z_0 eine nicht reelle Nullstelle von $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k,\ a_k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow P(\overline{z_t})=\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{z_t}^k \underbrace{=}_{a_k=\overline{a_k}} \overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz_t^k}=\overline{P(z_t)}=0 \Rightarrow \overline{z_0}$ ebenfalls Nullstelle von P,

Vielfachheit z_0= Vielfachheit $\overline{z_0}$.

\# $P(x)\underbrace{=}_{S1.9.1}(x-z_t)(x-\overline{z_t})Q_{n-2}\Rightarrow$

\# Falls z_t Nullstelle von $Q_{n-2}\Rightarrow\overline{z_t}$ Nullstelle von Q_{n-2}

\# Falls $\overline{z_t}$ Nullstelle von $Q_{n-2}\Rightarrow\overline{\overline{z_t}}=z_t$ Nullstelle von Q_{n-2}

\# $\Rightarrow P(z)\underbrace{=}_{S1.9.1}(x-z_t)^2(x-\overline{z_t})^2Q_{n-4}$ usw

$\Rightarrow P(x)=0$ für $\{x_1,\ldots x_\mu\in\mathbb{R}\}$, Vielfachheiten $\nu_1,\ldots,\nu_\mu$ (auch $\mu=0$ möglich), sowie für konjungiert komplexen nichtreellen Paaren $\{(z_1,\overline{z_1}),\ldots,(z_\nu,\overline{z_\nu})\}$, Vielfachheiten, $\sigma_1\ldots,\sigma_\nu$ (auch $\nu=0$ möglich).

$\Rightarrow$ Beh. a)

\# $\mu+2\nu=n$, $\mu=0$ oder $\nu=0$ möglich

\# $z_t=\alpha_t+i\beta_t\Rightarrow(x-z_t)(x-\overline{z_t})=[(x-\alpha_t)-i\beta_t][(x-\alpha_t)+i\beta_t]=(x-\alpha_t)^2+\beta_t^2=x^2-\underbrace{A_t}_{=2\alpha}x+\underbrace{B_t}_{=\alpha_t^2+\beta_t^2}$

\# $\underbrace{\Rightarrow}_{S6.5.2}\quad P(x)=a_n(x-x_1)^{\nu_1}\ldots(x-x_\mu)^{\nu_\mu}(x^2-A_1x+B_1)^{\sigma_1}\ldots(x^2-A_\nu x+B_\nu)^{\sigma_\nu}\quad a_n\in\mathbb{R}$.

$a_k=2\mathrm{Re}\ z_k,\ b_k=|z_k|^2\Rightarrow(x-z_k)(x-\overline{z_k})=(x^2-A_kx+B_k)\Rightarrow$ Beh. b)

$\underbrace{\Rightarrow}_{S6.5.2}$ Beh c).... da a offenbar der höchste Koeffizient von P ist $\Rightarrow a\in\mathbb{R}$

Andere Formulierung:
Zu jedem reellen Polynom $P\in\mathbb{R}[x]$ vom Grade $n\geq 1$ existieren verschiedene $x_1,\dots x_\mu\in\mathbb{R}$, verschiedene $(a_1,b_1),\dots(a_\nu,b_\nu)\in\mathbb{R}^2$, eine reelle Zahl $a\neq 0$, sowie natürliche Zahlen $\nu_1,\dots,\nu_\mu$, $\sigma_1,\dots\sigma_\nu$ derart, dass folgendes gilt:

a) Es ist $\mu+2\nu=n$, wobei auch $\mu=0$ oder $\nu=0$ eintreten kann

b) $x^2-a_kx+b_k\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$ $\forall$ $k=1,\dots,\nu$

c) Es gilt die Darstellung

(***) $P(x)=a(x-x_1)^{\nu_1}*\dots*(x-x_\mu)^{\nu_\mu}(x^2-a_1x+b_1)^{\sigma_1}*\dots*(x^2-a_\nu x+b_\nu)^{\sigma_\nu}$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$

*//**S6.5.2**(3501) Zu jedem $P\in\mathbb{C}[z]$ vom Grade $n\geq 1$ existieren verschiedene*
// $z_1,\dots z_m\in\mathbb{C}$, $\nu_1,\dots\nu_m\in\mathbb{N}$: $\nu_1+\dots+\nu_m=n$ und ein $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$:
//(*) $P(z)=a_n(z-z_1)^{\nu_1}\dots(z-z_m)^{\nu_m}$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}$

Bew: $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, $a_k\in\mathbb{R}$, $z_0\in\mathbb{C}$: $P(z_0)=0\Rightarrow P(\overline{z_0})=\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{z_0}^k=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz_0^k}=\overline{P(z_0)}=0\Rightarrow$
$P(\overline{z_0})=0$, $P(z_0)$ und $P(\overline{z_0})$ gleiche Vielfachheit.
Die Nullstellenmenge von P besteht also aus (verschiedenen) reellen Nullstellen $x_1,\dots x_\mu\in\mathbb{R}$ (wobei evt $\mu=0$ sein kann) sowie (gleichfalls verschiedenen) Paaren von konjungiert komplexen nichtreellen Nullstellen $(z_1,\overline{z_1}),\dots,(z_\nu,\overline{z_\nu})$ (wobei auch $\nu=0$ sein kann). Sind $\nu_1,\dots,\nu_\mu$, $\sigma_1,\dots\sigma_\nu$ die zugehörigen Vielfachheiten $\Rightarrow$ a)
Gesetzt $a_k=2\mathrm{Re}\ z_k$, $b_k=|z_k|\Rightarrow(x-z_k)()x-\overline{z_k})=x^2-a_kx+b_k\Rightarrow$ b)
S6.5.2 $\Rightarrow$ c) mit a höchster Koeffizient von P $\Rightarrow a\in\mathbb{R}$

S6.5.4(3504)Partialbruchzerlegung im Komplexen

Vor: $P,Q\in\mathbb{C}[z]$ mit $0\leq\gamma(P)<\gamma(Q)$,

(*) $Q(z)=a(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}\quad\forall\ z\in\mathbb{C},\ \nu_1+\ldots+\nu_m=n$

#Bem:Im Beweis nach Heuser $c=\dfrac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$ mit wegen 6.5.2 komplexen z_1

verwendet. Der Satz gilt deshalb im Komplexen.

Beh: $\exists$ eindeutig bestimmte $a_{jk}\in\mathbb{C}$:

$$R(z)=P(z)/Q(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{a_{jk}}{(z-z_k)^j}=$$

$$\frac{a_{11}}{(z-z_1)^1}+\frac{a_{21}}{(z-z_1)^2}+\ldots\frac{a_{\nu_1 1}}{(z-z_1)^{\nu_1}}+$$

$$\frac{a_{12}}{(z-z_2)^1}+\frac{a_{22}}{(z-z_2)^2}+\ldots\frac{a_{\nu_2 2}}{(z-z_2)^{\nu_k}}+$$

......

$$\frac{a_{1m}}{(z-z_m)^1}+\frac{a_{2m}}{(z-z_m)^2}+\ldots\ldots\frac{a_{\nu_m m}}{(z-z_m)^{\nu_m}}\qquad\forall\ z\in\mathbb{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_m\}$$

Bew: $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{a_{jk}}{(z-z_k)^j}\right)Q(z)=$

$$\begin{array}{l|l}
\dfrac{a_{11}}{(z-z_1)^1}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+ & a_{11}a_n(z-z_1)^{\nu_1-1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\\
\quad\dfrac{a_{21}}{(z-z_1)^2}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\ldots & \quad a_{21}a_n(z-z_1)^{\nu_1-2}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\ldots\\
\quad\dfrac{a_{\nu_1 1}}{(z-z_1)^{\nu_1}}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+ & \quad a_{\nu_1 1}a_n(z-z_1)^{\nu_1-\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\\
 & \\
\dfrac{a_{12}}{(z-z_2)^1}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+ & a_{12}a_n(z-z_1)^{\nu_1}(z-z_2)^{\nu_2-1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\\
\quad\dfrac{a_{22}}{(z-z_2)^2}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\ldots & \quad a_{22}a_n(z-z_1)^{\nu_1}(z-z_2)^{\nu_2-2}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\\
\quad+\dfrac{a_{\nu_2 2}}{(z-z_2)^{\nu_2}}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\ldots\ldots & \quad a_{\nu_2 2}a_n(z-z_1)^{\nu_1}(z-z_2)^{\nu_2-\nu_2}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\ldots\\
\dfrac{a_{1m}}{(z-z_m)^1}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+ & a_{1m}a_n(z-z_1)^{\nu_1}(z-z_2)^{\nu_2}\ldots(z-z_m)^{\nu_m-1}+\\
\quad\dfrac{a_{2m}}{(z-z_m)^2}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}+\ldots+ & \quad a_{2m}a_n(z-z_1)^{\nu_1}(z-z_2)^{\nu_2}\ldots(z-z_m)^{\nu_m-2}+\\
\quad\dfrac{a_{\nu_m m}}{(z-z_m)^{\nu_m}}a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m} & \quad a_{\nu_m m}a_n(z-z_1)^{\nu_1}(z-z_2)^{\nu_2}\ldots(z-z_m)^{\nu_m-\nu_m}
\end{array}$$

Obige Gleichung ● ● ● ist äquivalent zu der Polynomgleichung

$$P=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}a_{jk}P_{jk},\quad P_{jk}(z)=(z-z_k)^{\nu_k-j}\prod_{\mu=1,\mu\neq k}^{m}(z-z_k)^{\nu_\mu}=P(z)/a(z-z_k)^j.$$

Zu zeigen: $\forall$ P(z) mit $\gamma(P(z))<n=\gamma(Q)=\nu_1+...+\nu_m$ gilt
P(z) ist eine Linearkombination der n Polynome P_{jk}
Äquivalente Aussage #?????? Zu: P_{jk} sind linear unabhängig,

$$\#\text{d.h. } P=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}\overline{a}_{jk}P_{jk}=0 \Rightarrow \overline{a}_{jk}=0 \;\forall\; \overline{a}_{jk}$$

Dies zeigen wir durch Induktion über n:
Für n=1 ist offenbar nichts zu zeigen.
Sei also $n\geq 2$ und sei

$$(**)\quad 0=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k} a_{jk}P_{jk}(z) \;\forall\; z\in\mathbb{C}.$$

Offenbar gilt $P_{jk}(z_r)=0$ außer für $k=r$ und $j=\nu_r$, aber $P_{\nu_r r}(z_r)\neq 0$.
Einsetzen von z_r für irgend ein $r=1,...,m$ in (**) ergibt deshalb

$$0=a_{\nu_r r} \Rightarrow 0=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k-1} a_{jk}P_{jk}(z) \;\forall\; z\in\mathbb{C},$$ wobei einige der

inneren Summen auch leer sein können. Die übrig gebliebenen Polynome haben alle die Nullstellen $z_1,..z_m$ und deshalb können wir die Gleichung durch $(z-z_1)...(z-z_m)$ dividieren. Die so entstandene Gleichung ist wieder von der gleichen Natur wie (**), aber so, dass die Induktionshypothese anwendbar ist. Aus dieser folgt, dass auch die übrigen Koeffizienten $a_{jk}=0$ sein müssen.

#nach Heuser Analysis 1
#Vor: $P,Q\in\mathbb{C}[z]$ mit $0\leq\gamma(P)<\gamma(Q)$,
(*) $Q(z)=a_n(z-z_1)^{\nu_1}\dots(z-z_m)^{\nu_m}\ \ \forall\ z\in\mathbb{C},\ \nu_1+\dots+\nu_m=n,\ z_j\neq z_k,\ j\neq k$
#Ich habe nur Bew nach Heuser richtig verstanden, siehe weiter unten
#Beh: ∃ eindeutig bestimmte $a_{jk}\in\mathbb{C}$: $R(z)=P(z)/Q(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{a_{kj}}{(z-z_k)^j}=$

$$\frac{a_{11}}{(z-z_1)^1}+\frac{a_{12}}{(z-z_1)^2}+\dots\frac{a_{1\nu_1}}{(z-z_1)^{\nu_1}}+$$

$$\frac{a_{21}}{(z-z_2)^1}+\frac{a_{22}}{(z-z_2)^2}+\dots\frac{a_{2\nu_2}}{(z-z_1)^{\nu_2}}+\dots\dots\dots+$$

$$\frac{a_{m1}}{(z-z_m)^1}+\frac{a_{m2}}{(z-z_m)^2}+\dots\dots\frac{a_{m\nu_m}}{(z-z_m)^{\nu_m}}\qquad\forall\ z\in\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_m\},\ a_{jl}\in\mathbb{C}$$

*//**S6.5.2**(3501)Zu jedem $P\in\mathbb{C}[z]$ vom Grade $n\geq1$ existieren //*
//   verschiedene $z_1,\dots z_m\in\mathbb{C}$, natürliche Zahlen $\nu_1,\dots,\nu_m$ mit //
// $\nu_1+\dots+\nu_m=n$ und ein $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ derart, daß //
//   (*) $p(z)=a(z-z_1)^{\nu_1}\dots(z-z_m)^{\nu_m}\ \ \forall\ z\in\mathbb{C}$//
#Bew: Induktion nach $n=\gamma(Q)$

n=1: $$R(z)\underbrace{=}_{0\leq\gamma(P)<\gamma(Q)=1}\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\overbrace{c}^{\gamma(c)=0}}{\underbrace{\underbrace{a_1}_{n}(z-z_1)}_{\gamma=1}}\underbrace{=}_{a_{11}:=\frac{c}{a_1}}\frac{a_{11}}{(z-z_1)}\Rightarrow\text{Beh für } n=1$$

$n\in\mathbb{N}$, $n>1$, Annahme: Beh bewiesen $\forall\ \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}:0\leq\gamma(P_1)<\gamma(Q_1)<n$ (IH)
n: $0\leq\gamma(P)<\gamma(Q)<n$, Q
Setze $Q(z)=(z-z_1)^{\nu_1}Q_1(z)$, $Q_1(z):=a_n(z-z_2)^{\nu_2}\dots(z-z_m)^{\nu_m}$, $c=\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}\Rightarrow$
∀ $c\in\mathbb{C}$: (****) $\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{c}{(z-1)^{\nu_1}}=\frac{P(z)-cQ_1(z)}{(z-z_1)^{\nu_1}Q_1(z)}$, $P(z_1)-cQ_1(z_1)=0$.
Fall $P(z)-cQ_1(z)=0\ \Rightarrow\ P=cQ_1(z)\ \forall\ z$:
$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{c}{(z-1)^{\nu_1}}=0\ \Rightarrow\ \frac{P(z)}{Q(z)}\underbrace{=}_{(****)}\frac{c}{(z-1)^{\nu_1}}\ \text{mit}\Rightarrow\text{Beh}$$
Fall $P(z)-cQ_1(z)\neq0$ Polynom mit Nullstelle z_1 ∀ z:
$P(z)-cQ_1(z)\underbrace{=}_{S6.5.2}(z-z_1)Q_2(z)$, $Q_2(z)\neq0$, $\gamma(Q_2(z)+1\leq\max\{\gamma(P(z),Q_1(z))$
$$\Rightarrow P(z)/Q(z)\underbrace{=}_{(****)}\frac{c}{(z-1)^{\nu_1}}+\frac{(z-z_1)Q_2(z)}{(z-z_1)^{\nu_1}Q_1(z)}=\frac{c}{(z-1)^{\nu_1}}+\frac{Q_2(z)}{(z-z_1)^{\nu_1-1}Q_1(z)}\Rightarrow$$
$1\leq\gamma(Q_2)+1\leq\max\{\gamma(P,Q_1)\leq\gamma(Q)=n\ \Rightarrow\ 0<\gamma(Q_2)=n-1=\gamma(z-z_1)^{\nu_1-1}Q_1)$
#
⇒ Beh, da $\frac{Q_2(z)}{(z-z_1)^{\nu_1-1}Q_1(z)}$ nach Induktionsvoraussetzung (=Beh)
in Partialbrüche $a_{jk}/(z-z_j)^k$, $\nu_j>1:j=1,2,\dots,m$; wobei für festes
$j\neq1$: $a_{jk}/(z-z_j)^{k=1,2,\dots\nu_j}$,
$j=1$: $a_{1k}/(z-z_j)^{k=1,2,\dots\nu_j-1}$,
$\nu_1<1$:kein Term $A/(z-z_j)^k$
zerlegbar
//S6.5.4(3504)Partialbruchzerlegung im Komplexen

//Vor: $P,Q\in\mathbb{C}[z]$ mit $0\leq\gamma(P)<\gamma(Q)$,

// $\quad(*)\,Q(z)=a_n(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_m)^{\nu_m}\quad\forall\ z\in\mathbb{C},\ \nu_1+\ldots+\nu_m=n$

//Beh: $\exists$ eindeutig bestimmte $a_{jk}\in\mathbb{C}$:

// $$R(z)=P(z)/Q(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{a_{jk}}{(z-z_k)^j}=$$

// $$\frac{a_{11}}{(z-z_1)^1}+\frac{a_{21}}{(z-z_1)^2}+\ldots\frac{a_{\nu_1 1}}{(z-z_1)^{\nu_1}}+$$

// $$\frac{a_{12}}{(z-z_2)^1}+\frac{a_{22}}{(z-z_2)^2}+\ldots\frac{a_{\nu_2 2}}{(z-z_2)^{\nu_k}}+$$

// $\quad\ldots\ldots$

// $$\frac{a_{1m}}{(z-z_m)^1}+\frac{a_{2m}}{(z-z_m)^2}+\ldots\ldots\frac{a_{\nu_m m}}{(z-z_m)^{\nu_m}}\qquad\forall\ z\in\mathbb{C}\setminus\{z_1,\ldots,z_m\}$$

Bsp:1.) $R(z)=\dfrac{z+2}{z(z-1)}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{z-1}=\dfrac{az-a+bz}{z(z-1)}\quad\forall\ z\ \Leftrightarrow\ z+2=a(z-1)+bz$

Auch für $z=0$: $2=-a\ \Leftrightarrow\ a=-2$

$z=1$: $1+2=-2(1-1)+b*1\ \Leftrightarrow\ b=3\ldots\ldots\ \dfrac{(-2)z-(-2)+3z}{z(z-1)}=\dfrac{z+2}{z(z-1)}$

2.) $\dfrac{z+2}{z^2(z-1)}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{z^2}+\dfrac{c}{z-1}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

$z+2=az(z-1)+b(z-1)+cz^2$

$z=0{:}\ 2=-b,\ b=-2$

$z=1{:}\ 3=c$

$z+2-cz^2-b(z-1)=z+2-3z^2+2(z-1)=-3z^2+3z=-3z(z-1)=az(z-1)\ \Rightarrow\ a=-3$

$$\frac{-3}{z}+\frac{-2}{z^2}+\frac{3}{z-1}=\frac{-3z(z-1)-2(z-1)+3z^2}{z^2(z-1)}=\frac{-3z^2+3z-2z+2+3z^2}{z^2(z-1)}=\frac{z+2}{z^2(z-1)}$$

6.5.5(3507) Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen

#Vor.: $P,Q\in\mathbb{R}[x]$ ohne gemeinsame Nullstellen, $0\leq\gamma(P)<\gamma(Q)$.

$\quad Q(x)=\prod_{j=1}^{k}(x-\xi_j)^{r_j}\prod_{j=1}^{l}(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j}$ (siehe auch S6.5.3 (***))

#Beh.: $\exists$ eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_{\nu j}$, $\beta_{\nu j}$, $\vartheta\,\gamma_{\nu j}$ mit

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{r_j-1}\frac{a_{\nu j}}{(x-\xi_j)^{r_j-\nu}}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{s_{j-1}}\frac{\beta_{\nu j}x+\vartheta_{\nu j}}{(x^2-2c_jx+b_k)^{s_j-\nu}}\quad\forall\ x\in D,\ \text{mit } D=\mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_k\}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{r_j-1}\frac{a'_{\nu j}}{(x-\xi_j)^{r_j}}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{\nu=1}^{s_{j-1}}\frac{\beta'_{\nu j}x+\vartheta'_{\nu j}}{(x^2-2c_jx+b_k)^{s_j}}$$

$$=\frac{a_{11}}{x-\xi_1}+\frac{a_{12}}{(x-\xi_1)^2}+\ldots+\frac{a_{11}}{x-\xi_1}$$

$+$

(In anderen Unterlagen gehen die Summen bis r_j bzw s_j)

#Bew(von Redheffer):

Hilfaussage L6.5.1

Seien P,Q,R Polynome $\gamma(R)<\gamma(P)<\gamma(Q)\ \Rightarrow\ \exists$ eindeutig bestimmte

Polynome A und B, $\gamma(A)<\gamma(Q)$, $\gamma(B)<\gamma(P)$, $AP+BQ=R$.

Bew:Übersicht der $\gamma(.)$: $\overbrace{\underbrace{\underbrace{A}_{\gamma(A)<\gamma(Q)}\;P}_{\gamma(AP)<\gamma(P)+\gamma(Q)}+\underbrace{\underbrace{B}_{\gamma(B)<\gamma(P)}\;Q}_{\gamma(BQ)<\gamma(P)+\gamma(Q)}}^{\gamma(AP+BQ)<\gamma(P)+\gamma(Q)}=R$

Koeffizienten von P,Q,R seien p_j,q_j,r_j
($p_j=0$ für $j>\gamma(P)$, $q_j=0$ für $j>\gamma(Q)$, $r_j=0$ für $j>\gamma(R)$)
Koeffizienten der gesuchten A,B a_j,b_j
($a_j=0$ für $j\geq\gamma(Q)$, $b_j=0$ für $j\geq\gamma(P)$)
Schema: beachte , $\gamma(A)<\gamma(Q)$, $\gamma(B)<\gamma(P)$
$(a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_{\gamma(Q)-1}x^{\gamma(Q)-1}+0_{\gamma(Q)}x^{\gamma(Q)}..+0_{\gamma(P)+\gamma(P)}x^{\gamma(P)+\gamma(Q)})$ *
$(p_0+p_1x+p_2x^2+..+p_{\gamma(P)}x^{\gamma(P)}+0_{\gamma(P)+1}x^{\gamma(P)+1}..+0_{\gamma(P)+\gamma(Q)}x^{\gamma(P)+\gamma(Q)})$

$a_0p_0+a_0p_1x+a_0p_2x^2+\ldots\ldots$ $\qquad$ $+a_0p_kx^k+\ldots\ldots$
$a_1p_0x+a_1p_1x^2+\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $+a_1p_{k-1}x^k+\ldots\ldots$
$a_2p_0x^2+a_2p_1x^3+a_2p_2x^4+$ $\qquad$ $+a_2p_{k-2}x^k+\ldots\ldots$

…………………….

$+a_kp_{k-k}x^k+\ldots\ldots$

………………… . . $\qquad$ ………….$+a_{\gamma(Q)-1}p_{\gamma(P)}x^{\gamma(Q)-1+\gamma(P)}$

Vergl mit r_0 $\quad r_1$ $\quad r_2$ $\quad r_3$……….. $\qquad r_k$………

analog q_j,b_j Koeffizientenvergleich mit $r_0+r_1x+r_2x^2$ ⇒
$AP+BQ=R$ äquivalent zu $\gamma(P)+\gamma(Q)$ linearen Gleichungen mit
$\gamma(P)+\gamma(Q)$ Unbekannten a_j $(0\leq j<\gamma(Q))$ und b_j $(0\leq j<\gamma(P))$:
$\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}a_j+\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}b_j=r_k$ für $k=0,1,2,..,\gamma(P)+\gamma(Q)-1$
Nach Anlage Ausschnitt lineare Algebra linalg:
Ein lineares Gleichungssystem $A*x=b$ ist eindeutig lösbar ⇔
$A*x=0$ hat nur die triviale Lösung $x=0$ ⇒
$\sum_{j=0}^{k} p_{k-j}a_j+\sum_{j=0}^{k} q_{k-j}b_j=r_k$ für $k=0,1,2,..,\gamma(P)+\gamma(Q)-1$ ist eindeutig lösbar wenn
$\sum_{j=0}^{k} c_{kj}a_j+\sum_{j=0}^{k} d_{kj}b_j)x^k=0$ $\forall$ $k=0,1,2,..p+q-1$, d.h. $R=0$….
$AP+BQ=0$ nur wenn $A=B=0$?…
Sei A,B Lösung: Ist $Q(z_1)=0 \underbrace{\Rightarrow}_{Vor} P(z_1)\neq 0 \Rightarrow A(z_1)=0$ $\forall$ 0-Stellen Q
$\underbrace{\Rightarrow}_{Zahl\ Nullstellen\ A\leq\gamma(Q)-1}$ Widerspruch ⇒ $A=0$ ⇒ $B=0$ mit gleicher Logik
Hilfaussage L6.5.2
Vor.: P, $Q_1,\ldots,Q_m$ Polynome, je 2 ohne gemeinsame Nullstellen,
$Q=Q_1*Q_2\ldots*Q_m$ und $\gamma(P)<\gamma(Q)$.
Beh: ∃ eindeutig bestimmte Polynome $P_1,\ldots,P_m$, $\gamma(P_j)<\gamma(Q_j)$ und

$$\frac{P}{Q}=\sum_{j=1}^{m}\frac{P_j}{Q_j}$$

Bew:Induktion nach m

m=1: $\qquad (Q=Q_1)\ldots\ \frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1} \Rightarrow P_1=P$

$m-1\mapsto m$: Wende Hilfsaussage 1 an auf $AQ_m+B(Q_1\ldots Q_{m-1})=P$.

Vor für Hilfsaussage 1: $Q_1 \dots Q_{m-1}$ haben keine gemeinsame Nullstelle (nach Vor schon gegeben)

$$\gamma(P) < \gamma(Q_1 \dots Q_{m-1}) = \left(\sum_{j=1}^{m-1} \gamma(Q_j) \right) + \gamma(Q_m) = \gamma(Q_1 \dots Q_{m-1}) + \gamma(Q_m) \underbrace{\Rightarrow}_{Hilfsaussage\,1}$$

A mit $\gamma(A) < \gamma(Q_1 \dots Q_{m-1})$ und B mit $\gamma(B) < \gamma(Q_m)$, $P_m := B \Rightarrow$

$AQ_m + P_m(Q_1 \dots Q_{m-1}) = P$, $\gamma(P_m) < \gamma(Q_m) \underbrace{\Rightarrow}_{:Q}$

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{Q_1 \dots Q_{m-1}} + \frac{P_m}{Q_m} = \sum_{j=1}^{m-1} \underbrace{\frac{P_j}{Q_j}}_{\otimes} + \underbrace{\frac{P_m}{Q_m}}_{\oplus} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j}{Q_j}$$

wobei $\otimes$ nach Induktionsvor und $\oplus$ nach Hilfsaussage 1 eindeutig ist.

Sei $Q = (H_1)^{r_1} \dots (H_k)^{r_k} * (L_1)^{s_1} \dots (L_1)^{s_l}$ mit $H_j(x) = (x - \xi_j)$ und $L_j = x^2 - 2c_jx + b_j \Rightarrow$

$Q_j = (H_j)^{r_j}$ oder $(L_j)^{s_j} \underbrace{\Rightarrow}_{Hilfsaussage\,2}$

$$\frac{P}{Q} = \sum_{j=1}^{k} \frac{P_j(x)}{(x - \xi_j)^{r_j}} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\tilde{P}_j(x)}{(x^2 - 2c_jx + b_j)^{s_j}}$$

(●) ∀ $P_j(x)$, $\gamma(P_j)<r_j$: $\frac{P_j(x)}{(x-\xi_j)^{r_j}}=\sum_{\nu=1}^{r_j}\frac{a_{j\nu}}{(x-\xi_j)^{r_j}}$,

Bew: Induktion nach r_j

IA $r_j=1$: $\frac{P_{j1}(x)}{x-\xi_j}=\sum_{\nu=1}^{1}\frac{a_{j\nu}}{(x-\xi_j)^{\nu}}=\frac{a_{j0}}{x-\xi_j}$, $\gamma(P_{j1})=0<r_j=1$

IH r_j : $\frac{P_{jr_j}(x)}{(x-\xi_j)^{r_j}}=\sum_{\nu=1}^{r_i}\frac{a_{j\nu}}{(x-\xi_j)^{\nu}}$, $\gamma(P_{jr_j})<r_j$

*//**S1.9.1'''**(1104)Divisionssatz//*
//Vor: Polynome S(z)≢0 ,P(z) beliebig.//
*//Beh: ∃ eindeutig bestimmte Polynome Q(z) und R(z):P=Q*S+R, γ(R)<γ(S).//*

Bem: $\frac{R}{Q}=S+\frac{R}{Q}$

r_j+1: $\gamma(P_{j(r_j+1)})<r_j+1$

$$\frac{P_{j(r_j+1)}(x)}{(x-\xi_j)}\underbrace{=}_{S1.9.1'''}\overline{R}_j(x)+\frac{a_{j(r_j+1)}}{x-\xi_j},\quad a_{j(r_j+1)}\in\mathbb{R}.$$

$$\gamma\left(\frac{P_{j(r_j+1)}(x)}{x-\xi_j}\right)=\gamma(P_{j(r_j+1)})-1\Rightarrow\gamma(\overline{P}_j)\le\gamma(P_{j(r_j+1)})-1<r_j+1-1=r_j\underbrace{\Rightarrow}_{IH}$$

$$\frac{P_{j(r_j+1)}(x)}{(x-\xi_j)^{r_j+1}}=\frac{P_{jr_j}(x)}{(x-\xi_j)^{r_j}}+\frac{a_{j(r_j+1)}}{(x-\xi_j)^{r_j+1}}=$$

$$\sum_{\nu=1}^{r_j}\frac{a_{j\nu}}{(x-\xi_j)^{\nu}}+\frac{a_{j(r_j+1)}}{(x-\xi_j)^{r_j+1}}=\sum_{\nu=1}^{r_j+1}\frac{a_{j\nu}}{(x-\xi_j)^{\nu}}$$

(● ●) ∀ $\tilde{P}_j(x)$, $\gamma(\tilde{P}_j)<2s_j$: $\frac{\tilde{P}_j(x)}{(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j}}=\sum_{\nu=1}^{s_j}\frac{b_{j\nu}x+\vartheta_{j\nu}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{\nu}}\Rightarrow$

Bew: Induktion nach s_j

IA $s_j=1$: $\frac{\tilde{P}_{j1}(x)}{x^2-2c_jx+b_j}=\sum_{\nu=1}^{1}\frac{b_{j\nu}x+\vartheta_{j\nu}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{\nu}}=\frac{b_{j1}x+\vartheta_{j1}}{x^2-2c_jx+b_j}$, $\gamma(\tilde{P}_j)=1<2s_j=2$

IH s_j: $\frac{\tilde{P}_{js_j}(x)}{(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j}}=\sum_{\nu=1}^{s_j}\frac{b_{j\nu}x+\vartheta_{j\nu}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{\nu}}$, $\gamma(\tilde{P}_j)<2s_j$

*//**S1.9.1'''**(1104)Divisionssatz//*
//Vor: Polynome S(z)≢0 ,P(z) beliebig.//
*//Beh: ∃ eindeutig bestimmte Polynome Q(z) und R(z):P=Q*S+R, γ(R)<γ(S).//*

Bem: $\frac{R}{Q}=S+\frac{R}{Q}$

s_j+1: $\gamma(P_{j(s_j+1)})<2(s_j+1)=2s_j+2$.

$$\frac{\tilde{P}_{j(s_j+1)}(x)}{x^2-2c_jx+b_j}\underbrace{=}_{S1.9.1'''}\overset{*}{P}_j(x)+\frac{b_{j(s_j+1)}x+\vartheta_{j(s_j+1)}}{x^2-2c_jx+b_j},\quad b_{j(s_j+1)},\vartheta_{j(s_j+1)}\in\mathbb{R}.$$

$$\gamma\left(\frac{\tilde{P}_{j(s_j+1)}(x)}{x^2-2c_jx+b_j}\right)=\gamma(\tilde{P}_{j(s_j+1)})-2 \;\Rightarrow\; \gamma(\overset{*}{P}_j)\le\gamma(\tilde{P}_{j(s_j+1)})-2<2s_j+2-2=2s_j$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{IH}$

$$\frac{\tilde{P}_{j(s_j+1)}(x)}{(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j+1}}=\frac{\tilde{P}_{js_j}(x)}{(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j}}+\frac{b_{j(s_j+1)}x+\vartheta_{j(s_j+1)}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j+1}}=$$

$$\sum_{\nu=1}^{s_j}\frac{b_{j\nu}x+\vartheta_{j\nu}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{\nu}}+\frac{b_{j(s_j+1)}x+\vartheta_{j(s_j+1)}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{s_j+1}}=\sum_{\nu=1}^{s_j+1}\frac{b_{j\nu}x+\vartheta_{j\nu}}{(x^2-2c_jx+b_j)^{\nu}}$$

$\Rightarrow$ Beh

Andere Formulierung: ν_k σ_k

Vor: $P,Q\in\mathbb{R}_+$, $0\le\gamma(P)<\gamma(Q)$,

(***) $Q(x)=a(x-x_1)^{\nu_1}*\ldots*(x-x_\mu)^{\nu_m}(x^2-A_1x+B_1)^{s_1}*\ldots*(x^2-A_\nu x+B_\nu)^{s_\nu}\quad\forall\; x\in\mathbb{R}$

Beh: $\exists$ eindeutige a_{jk}, α_{jk}, $\beta_{jk}\in\mathbb{R}$: $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{a_{jk}}{(x-x_k)^j}+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\sigma_k}\frac{\alpha_{jk}x+\beta_{jk}}{(x^2-a_kx+b_k)^j}$

$\forall\; x\in D$, mit $D=\mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_\mu\}$

Bew: Weitgehend anlog zu S6.5.3. Betrachtung Äquivalente Gleichung

$P=\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu_k}a_{jk}P_{jk}+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu_k}(\alpha_{jk}x+\beta_{jk})Q_{jk}$, mit $P_{jk}=Q(x)/(x-x_k)^j$, $Q_{jk}=Q(x)/(x^2-a_kx+b_k)^j$

(beachte dass dies alle Polynome in x sind)

Beh äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Polynome P_{jk}, Q_{jk}, $Q_{jk}(x)$ und $xQ_{jk}(x)$. Also Betrachtung

$0=\displaystyle\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu_k}a_{jk}P_{jk}(x)+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu_k}(\alpha_{jk}x+\beta_{jk})Q_{jk}(x)\quad\forall\; x\in\mathbb{R}$

Aus dem Nullstellensatz für Polynome folgt, dass dieselbe Gleichung aber auch $\forall\; z\in\mathbb{C}$ gelten muss. Einsetzen der reellen Nullstellen $x_1,\ldots x_\mu\in\mathbb{R}$ ergibt $a_{\nu_k k}=0\;\forall\; k$. Setzt man ein Paar von konjungiert komplexen Nullstellen ein, so erhält man 2 Gleichungen, aus denen $a_{\sigma_k k}=\beta_{\sigma_k k}=0$ folgt. Danach kann man auf die verbleibende Summe wieder die Induktionshypothese anwenden.

Bem: Zur praktischen Durchführung der Partialbruchzerlegung:

In jedem Fall ist der Übergang zur äquivalenten Polynomgleichung angebracht. Danach hat man in jedem Fall ein lineares Gleichungssystem in $n=\gamma(Q)$ Unbekannten zu lösen. Hierfür bieten sich folgende Möglichkeiten an:

1.) Sammeln aller Terme mit gleichen Potenzen der Variablen, also durch Koeffizientenvergleich, erhält man ein lineares Gleichungssystem, welches in jedem Fall eindeutig gelöst werden kann.
2.) Durch Einsetzen geeigneter Werte, vor allem der Nullstellen des Nennerpolynoms, erhält man Gleichungen, welche in der Regel sehr einfach nach einer Unbekannten auflösbar sind. In jedem Fall folgt aus dem Nullstellensatz für Polynome, dass sich durch Einsetzen von n verschiedenen Werten ein Gleichungssystem ergibt, das

eindeutig lösbar ist.

3.) Hat man einige Unbekannte berechnet, kann man oft durch Differenzieren der Polynomgleichung eine neue, einfachere Gleichung erhalten, aus der man weitere Unbekannte bestimmen kann, usw.

Bsp.: (.) $R(x)=1/(x^2-x) \underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{Nullstellen\ 0,1;\ Vielfachheit\ 1}}_{S6.5.5} R(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{a}{x-0}+\frac{b}{x-1} \quad \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\} \Rightarrow$

$1=a(x-1)+bx \quad \forall\ x\in\mathbb{R} \underbrace{\Rightarrow}_{x=0,\ x=1} a=-1,\ b=1$

(..) $R(x)=1/(x^3+x)^2=1/[x(x^2+1)]^2 \underbrace{\Rightarrow}_{a,b,c,d,e,f\in R?}$

$R(x)=\frac{1}{(x^3+x)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{(x^2+1)}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^2} \quad \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$

$1=ax(x^2+1)^2+b(x^2+1)^2+(cx+d)x^2(x^2+1)+(ex+f)x^2 \quad \forall\ x\in\mathbb{R} \underbrace{\Rightarrow}_{x=0,\ x=\pm i}$

$b=1,\ 1=-(ei+f)=-(-ei+f) \Rightarrow e=0, f=-1 \Rightarrow$

$-x^2(x^2+1)=ax(x^2+1)^2+(cx+d)x^2(x^2+1) \quad \forall\ x\in\mathbb{R} \underbrace{\Rightarrow}_{:x(x^2+1)}$

$-x=a(x^2+1)+(cx+d)x \quad \forall\ x\in\mathbb{R} \underbrace{\Rightarrow}_{x=0,\ x=\pm j} a=0,\ -1=ic+d=-ic+d \Rightarrow d=-1, c=0$

(…) $R(x):=\frac{x^5+1}{x^4+x^2}=\frac{P^*(x)}{Q(x)}$, $\gamma(P^*)>\gamma(Q)$, $\exists$ P und Q, $\gamma(P)<\gamma(Q^*)$: $\frac{P^*(x)}{Q(x)}=P(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}$

$(x^5+1):(x^4+x^2)=x+\frac{-x^3+1}{x^4+x^2} \Rightarrow \frac{-x^3+1}{x^4+x^2}=\frac{-x^3+1}{x^2(x^2+1)^1}=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\gamma(P)<\gamma(Q)$

$-(x^5+x^3)$

$-x^3+1$

(***) $Q(x)=a(x-x_1)^{\nu_1}*...*(x-x_\mu)^{\nu_\mu}(x^2-A_1x+B_1)^{\sigma_1}*..*(x^2-A_\nu x+B_\nu)^{\sigma_\nu}$

$=1*(x-0)^2(x^2-0*x+1)^1 \Rightarrow a=1,\ \nu_1=2,\ \mu=1,\ \sigma_1=1,\ \nu=1,\ A_1=0,\ B_1=1,$

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{a_{jk}}{(x-x_k)^j}+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\sigma_k}\frac{\alpha_{jk}x+\beta_{jk}}{(x^2-A_kx+B_k)^j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{1}\sum_{j=1}^{2}\frac{a_{jk}}{(x-x_k)^j}+\sum_{k=1}^{1}\sum_{j=1}^{1}\frac{\alpha_{jk}x+\beta_{jk}}{(x^2-A_kx+B_k)^j}$$

$$=\frac{a_{11}}{(x-x_1)^1}+\frac{a_{21}}{(x-x_1)^2}+\frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{(x^2-A_1x+B_1)^1}=\frac{a_{11}}{(x-x_1)^1}+\frac{a_{21}}{(x-x_1)^2}+\frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2-0*x+1}$$

$$=\frac{a_{11}}{x}+\frac{a_{21}}{x^2}+\frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2+1}$$

$\Leftrightarrow$

$-x^3+1=x^2(x^2+1)\frac{P(x)}{Q(x)}=x^2(x^2+1)\left(\frac{a_{11}}{x}+\frac{a_{21}}{x^2}+\frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2+1}\right)=$

$x(x^2+1)a_{11}+(x^2+1)a_{21}+x^2(\alpha_{11}x+\beta_{11})=$

$x^3(a_{11}+\alpha_{11})+x^2(a_{21}+\beta_{11})+xa_{11}+a_{21} \Rightarrow a_{11}+\alpha_{11}=-1,\ a_{21}+\beta_{11}=0,\ a_{11}=0,\ a_{21}=1 \Rightarrow$

$a_{21}=1,\ a_{11}=0,\ \beta_{11}=-1,\ \alpha_{11}=-1 \Rightarrow$

$$R(x)=\frac{P^*(x)}{Q(x)}=P(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}=x+\frac{a_{11}}{x}+\frac{a_{21}}{x^2}+\frac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2+1}=x++\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x^2+1}$$

Als Anwendung der Partialbruchzerlegung wollen wir nun das Problem angehen, zu einer beliebigen rationalen Funktion(mit reellen Koeffizienten) eine Stammfunktion zu finden:

A6.5.1 Gegeben sei eine rationale Funktion $r\in\mathbb{R}(x)$. Finde eine Stammfunktion.

*//**S1.9.1'''**(1104) Divisionssatz//*
//Vor: Polynome $S(z)\not\equiv 0$, $P(z)$ beliebig.//
//Beh: $\exists$ eindeutig bestimmte Polynome $Q(z)$ und $R(z)$: $P=Q*S+R$, $\gamma(R)<\gamma(S)$.//

Lös: Sei $R=P/Q \underbrace{\overset{S1.9.1'''}{\Rightarrow}}_{\gamma(P)\geq\gamma(Q)}$ $\exists$ Polynome $P_1,P_2\in\mathbb{R}[x]$: $R=P/Q=P_1+P_2/Q$ und $\gamma(P_2)<\gamma(Q)$.

Da man zu P_1 sofort eine Stammfunktion angeben kann, soll im Weiteren angenommen werden, dass $\gamma(P)<\gamma(Q)$ ist. Dann kann man nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung im Reellen die Funktion R in eine Summe von einfachen Termen zerlegen. Es bleibt also zu zeigen, dass man zu jedem einzelnen Term eine Stammfunktion angeben kann. Dies wollen wir jetzt tun, wobei in jedem Fall durch Differenzieren nachgeprüft werden kann, dass die angegebene Funktion F tatsächlich die Stammfunktion zu f ist:

1.) $f(x)=(x-x_0)^{-1}$ hat die Stammfunktion $F(x)=\log|x-x_0|$
2.) $f(x)=(x-x_0)^{-j}$ hat die Stammfunktion $F(x)=(1-j)^{-1}(x-x_0)^{1-j}$ $\forall$ $j\in\mathbb{N}: j\geq 2$.
3.) $f(x)=(\alpha x+\beta)/(x^2-ax+b)$, $a^2<4b$ damit der Nenner keine reelle Nullstelle mehr hat.

//**S5.5.2**(3004) Es gilt c) $\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.
//**S5.1.6**(2750) Differentiationsregeln//
//2.) Kettenregel//
// Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei $g:B\to\mathbb{C}$ //
// differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ //
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.//

Wir zerlegen f=g+h

$$f(x)=\underbrace{\frac{\alpha}{2}\frac{2x-a}{x^2-ax+b}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{\beta+a\alpha/2}{x^2-ax+b}}_{h(x)}.$$

S5.1.6: $G(x)=(\alpha/2)\log|x^2-ax+b|$ ist Stammfunktion zu g

S5.5.2 c), S5.1.6: $H(x)=\frac{2\beta+a\alpha}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}$ ist Stammfunktion zu h.

\# $$H'(x)=\frac{2\beta+a\alpha}{\sqrt{4b-a^2}}\frac{1}{1+\left(\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)^2}\left(\frac{2x}{\sqrt{4b-a^2}}-\frac{a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)'=$$

\# $$\frac{2\beta+a\alpha}{\sqrt{4b-a^2}}\frac{1}{\frac{4b-a^2+4x^2-4ax+a^2}{4b-a^2}}\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}=\frac{(2\beta+a\alpha)}{4x^2-4ax+4b}=h(x)$$

4.) $f(x)=\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}$

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^{n-1}}+2(2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)$$

\# Weiter rekursiv bis 3.) angewendet werden kann

\# $$F'(x)=\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{2(x^2+ax+b)^{n-1}-(2x+a)(n-1)(x^2+ax+b)^{n-2}(2x+a)}{(x^2+ax+b)^{2n-2}}+\right.$$

\# $$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(x^2+ax+b)^{n-2}(2(x^2+ax+b)-(2x+a)^2(n-1))}{(x^2+ax+b)^{2n-2}}+\right.$$

$$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(2x^2+2ax+2b-(4x^2+4ax+a^2)(n-1))}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$$

$$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(2x^2+2ax+2b-4nx^2-4anx-na^2+4x^2+4ax+a^2)}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$$

$$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(6x^2-4nx^2+6ax-4anx+2b-na^2+a^2)}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$$

$$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(6x^2-4nx^2+6ax-4anx+2b-na^2+a^2)}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$$

$$\left.(4n-6)\frac{x^2+ax+b}{(x^2+ax+b)^n}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{6x^2-4nx^2+6ax-4anx+2b-na^2+a^2+4nx^2+4anx+4nb-6x^2-6ax-6b}{(x^2+ax+b)^n}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{-4b-na^2+a^2+4nb}{(x^2+ax+b)^n}\right)=\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{n(4b-a^2)-(4b-a^2)}{(x^2+ax+b)^n}\right)=$$

$$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\frac{(n-1)(4b-a^2)}{(x^2+ax+b)^n}=f(x)$$

5.) $f(x)=\frac{\alpha+\beta x}{(x^2+ax+b)^n}$, $a^2<4b$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//

//1.)Vor:Seien $f,g: M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in\overset{\circ}{M}$.//

//Beh: d)Ist $g(z_0)\neq 0$ (und damit $\neq 0$ in $U_\delta(z_0)\subset M$... $\Rightarrow$ //
// $\exists$ $g(z)\neq 0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$), g differenzierbar, d.h. stetig, so ist f/g
// differenzierbar in z_0 und //
// $(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//

Lös: $f(x)=\underbrace{\frac{\alpha}{2}\frac{2x-a}{(x^2+ax+b)^n}}_{f_1(x)}+\underbrace{\frac{\beta+a\alpha/2}{(x^2+ax+b)^n}}_{f_2(x)}$

$F_1(x)=\frac{-\alpha}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}$ ist Stammfunktion zu f_1:

\# $F_1'(x)=\frac{-\alpha}{2(n-1)}((x^2+ax+b)^{-n+1})'=\frac{-\alpha}{2(n-1)}(-n+1)(x^2+ax+b)^{-n})(2x+a)=f_1(x)$

\# $F_2(x)=(\beta-\frac{\alpha a}{2})\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx$ ist Stammfunktion zu f_2.

\# Weiter rekursiv nach 4.) bis 3.) angewendet werden kann
Es reicht daher aus, eine Stammfunktion $g_n(x)=(x^2-ax+b)^{-n}$ zu finden?
Es gilt:: $(4b-a^2)(n-1)g_n(x)=\frac{2(2n-3)}{(x^2-ax+b)^{n-1}}+\frac{d}{dx}\frac{2x-a}{(x^2-ax+b)^{n-1}}$?????.

(Aus Vorlesung, verstehe ich leider nicht, hat jemand Hilfe für mich?)
Der 2. Term hat natürlich eine Stammfunktion, während der 1. Term, bis auf eine Konstante, gleich g_{n-1} ist. Daher kann man aus dieser Formel rekursiv eine Stammfunktion zu g_n berechnen

Es sei noch erwähnt, dass man die oben angegebenen Stammfunktionen sowie viele weitere in zahlreichen Formelsammlungen nachschlagen kann.

A6.5.2 Führe eine Partialbruchzerlegung im Reellen für folgende rationale Funktionen durch und finde die Stammfunktionen:

$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$, $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$, $\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$

A6.5.3

a) $r(x)=\frac{x^4+2x^3}{(x-2)^3(3x+1)^2\underbrace{(x^2+2)}_{\text{keine reellen Nst}}}=$

$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{3x+1}+\frac{E}{(3x+2)^2}+\frac{ax+b}{x^2+2}$

$x^4+2x^3=A(x-2)^2(3x+1)^2(x^2+2)+B(x-2)(3x+1)^2(x^2+2)+$
$C(3x+1)^2(x^2+2)+D(x-2)^3(3x+1)(x^2+2)+E(x-2)^3(x^2+2)+$
$(ax+b)(x-2)^3(3x+1)^2$

b) $r(x)=\dfrac{x^6+4x^3}{\underbrace{(x^2-1)^2}_{[(x-1)(x+1)]^2}\ \underbrace{(x^2-6x+10)}_{(x-3)^2+1\ \text{keine reellen Nst}}}=$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{ax+b}{x^2-6x+10}+\frac{cx+d}{(x^2-6x+10)^2}+\frac{ax+b}{(x^2-6x+10)^3}$$

A6.5.4 $\displaystyle\int_2^4 \frac{3x^2+x-1}{x^3-1}dx$

Lös: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow$

$(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1$ hat keine reellen Nullstellen $\Rightarrow$

$$\frac{3x^2+x-1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{ax+b}{x^2+x+1} \Rightarrow$$

$3x^2+x-1=Ax^2+Ax+A+ax^2+bx-ax-b \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 3=A+a \\ 1=A+b-a \\ -1=A-b \end{array}\right\} \Rightarrow A=1,\ a=2,\ b=2 \Rightarrow$$

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x+2}{x^2+x+1}\right)dx=\int_2^4 \left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx+\int_2^4 \frac{1}{x^2+x+1}dx=$$

$$\left(\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{(x+1/2)^2+1}=\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}=\frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right)^2+1},\right.$$

$u=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)$, $du=\frac{2}{\sqrt{3}}dx$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}du$, $x=2 \Rightarrow u=\frac{5}{\sqrt{3}}$, $x=4 \Rightarrow u=\frac{9}{\sqrt{3}}$,

$$\left.\frac{4}{3}\int_{5/\sqrt{3}}^{9/\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}du\ \right)$$

$$\log(x-1)\Big|_2^4+\log(x^2+x+1)\Big|_2^4+\frac{4\sqrt{3}}{3*2}\arctan u\Big|_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{9}{\sqrt{3}}}=$$

$$\log 3-\log 1+\log 21-\log 7+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{9}{\sqrt{3}}$$

b) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2x^3-4x^2-18x-54}{x^4-81}dx$

Lös: $x^4-81=\underbrace{(x^2-9}_{(x-3)(x+3)} * \overbrace{(x^2+9)}^{\text{keine reellenNullst}}$

$$\int_4^5 \left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}+\frac{ax+b}{x^2+9}\right)dx=$$

$(2x^3-4x^2-18x-54=$

$Ax^3+3Ax^2+9Ax+27A+Bx^3+3Bx^2+9Bx-27B+ax^3+9ax+bx^2-9b$,

$A=-1$, $B=+1$, $a=2$, $b=0)$

$$\int_4^5 \left(\frac{-1}{x-3}+\frac{1}{x+3}+\frac{2x}{x^2+9}\right)dx=-\log(x-3)\Big|_4^5+\log(x+3)\Big|_4^5+\log(x^2+9)\Big|_4^5=$$

$$\log 2+\log 1+\log 8-\log 7+\log 34-\log 25=\log\left(\frac{8*34}{2*7*25}\right)=$$

$\log 136/175$

c) $\int_0^1 \frac{x^5+x+1}{x^4+1}dx - \int_0^1 (x+\frac{1}{x^4+1})dx$

Lös: $\underbrace{x^4+1}_{keien\ reellen\ Nullst} = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+cx^3+dx^2+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd$

$x^4+ax^3+cx^3+acx^2+bx^2+dx^2+adx+bcx+bd$

#$a+c=0$, $ac+b+d=0$, $ad+bc=0$, $bd=1 \Rightarrow c=-a$, $d=\frac{1}{b}$, $-a^2+b+\frac{1}{b}=0$, $a\frac{1}{b}-ab=0 \Rightarrow$

#$a(\frac{1}{b}-b)=0 \Rightarrow b=1$ oder $a=0 \Rightarrow$

#$b=1$: $d=1$, $ac+2=0$, $ac=-2$, $-a^2=-2$, $a=\sqrt{2}$, $c=-\sqrt{2}$

#$a=0$: $c=0$, $b+d=0$, $b=-d$, $bd=-b^2=-d^2=1 \Rightarrow b=i$, $d=i$, $bd=-1$ Widerspruch

$a+c=0$, $c=-a$, $b+1/b-a^2=0$, $b+d+ac=0$, $a\frac{1}{b}-ba=0 \Rightarrow a=a+(\frac{1}{b}-b)=0$,

$ad+bc=0$, $bd=1 \Rightarrow b^2+1=0 \Leftrightarrow b=\frac{1}{b}$, $b^2=1$, $b=1$, $a^2=2$, $a=\sqrt{2}$,

$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$,

$b+d=1 \Rightarrow b=1/2=d$, $(ax+bx)=0 \Rightarrow a=\sqrt{2}/4$, $c=-\sqrt{2}/4$ $\left(\frac{2x}{4\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{4}\right)$

$\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx =$

$\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{\underbrace{x^2+\sqrt{2}x+1}_{\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x+\sqrt{2}/2))^2+1)}}dx$, (denn $\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x+\frac{\sqrt{2}}{2}))^2+1) = \frac{1}{2}(2(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2})+1) =$

$\frac{1}{2}(2x^2+2\sqrt{2}x+1+1) = x^2+\sqrt{2}x+1)$

Substitution $u=\sqrt{2}(x+\sqrt{2}/2)$, $du=\sqrt{2}dx$,

$x=0 \Rightarrow u=1$, $x=1 \Rightarrow u=1+\sqrt{2}$

$\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{\underbrace{x^2-\sqrt{2}x+1}_{\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x-\sqrt{2}/2))^2+1)}}dx$, (denn $\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}))^2+1) = \frac{1}{2}(2(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2})+1) =$

$\frac{1}{2}(2x^2-2\sqrt{2}x+1+1) = x^2-\sqrt{2}x+1)$

Substitution $u=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}/2)$, $du=\sqrt{2}dx$,

$x=0 \Rightarrow u=-1$, $x=1 \Rightarrow u=\sqrt{2}-1$

$\int_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = 2\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+1}du$

$2\arctan u\Big|_1^{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx =$

$\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}(\log(x^2+\sqrt{2}+1)\Big|_0^1) - \log(x^2-\sqrt{2}x+1)\Big|_0^1) +$

$\frac{1}{4\sqrt{2}}(2\arctan u)\Big|_1^{1+\sqrt{2}} + 2\arctan u\Big|_{-1}^{-1+\sqrt{2}}$

A6.5.5..............

Lös:$\tan \alpha/2=t \Rightarrow \tan x=\sin x/\cos x=\tan(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}}=$

$\frac{2t}{1-t^2}$, auf $(0,\pi/2)$, $\sin x\geq 0$, $\cos x\geq 0$

$\sin x=\sqrt{1+\cos^2 x}$, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{2t}{1-t^2}$,

$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{4t^2}{1-2t^2+t^2}$, $\sin^2 x(1-2x^2+t^2)=4t^2-\sin^2 x(4+t)$,

$\sin^2 x+1+2t^2+t^4=4t^2$, $\sin^2 x=\frac{4t^2}{1+2t^2+t^4}$, $0\leq\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\frac{4t^2}{1+t^2}}=\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{(1+t^2)^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t=\tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\arctan t$, $x=2\arctan t$, $dx=2\frac{t}{1+t^2}dt$, $x=0 \Rightarrow t=0$,
$x=\pi/2 \Rightarrow t=1$…..

$$\int_0^{\pi/2} r(\sin x\cos x)dx=\int_0^1 r\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}2\frac{1}{1+t^2}dt$$

A6.5.6 ????

Lös:$f(x)=\arccos x$, $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=-1(1-x^2)^{-1/2}\underbrace{=}_{\text{Bin Re ihe}}$

$-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$, $\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$ integrierbar.

$\int_0^x \binom{-1/2}{n}(-t^2)^n\,dt=\binom{-1/2}{n}(-t)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\arccos x=\int_0^x f(x)dx+\underbrace{1}_{\arccos 0}$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad\forall\ |x|<1$