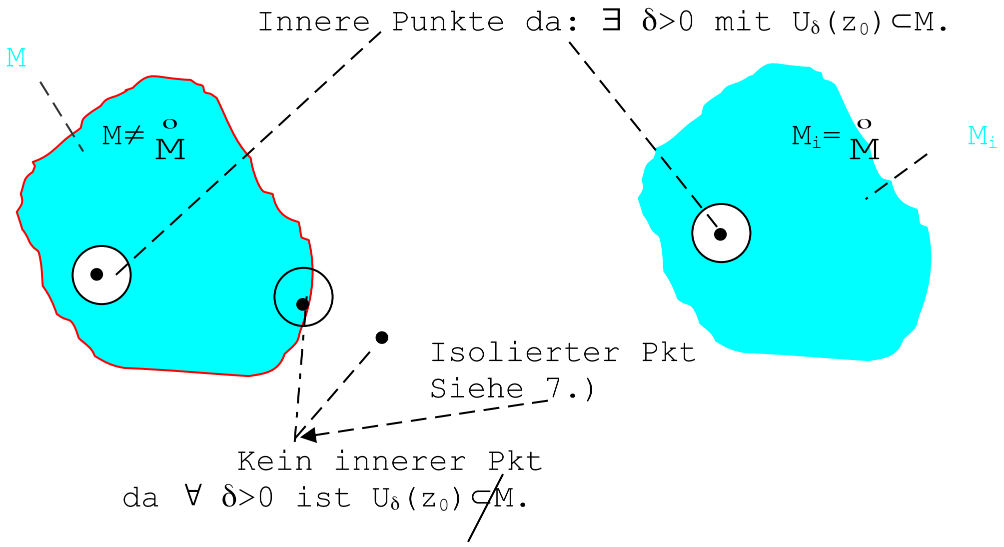
4 (2200) **Funktionsgrenzwerte und stetige Funktionen**

4.1 (2200) **Topologische Begriffe**

D4.1.1 (2200) $\mathbb{K}$ Körper, zum Bsp $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $M\subset\mathbb{K}$, $M\neq\emptyset$.
Für $z\in\mathbb{K}$ und $\delta>0$ sei
$U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbb{K} \mid |z-z_0|<\delta\}=(z_0-\delta, z_0+\delta)=\delta$-Umgebung von z_0 in $\mathbb{K}$.
$\overset{o}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{K} \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$.

1.) • $z_0\in M$ heißt innerer Punkt von $M :\Leftrightarrow \exists\ \delta>0$ mit $U_\delta(z_0)\subset M$.
• • $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M
• • • $\overset{o}{M}$ =offener Kern von M.
• • • • M heißt offen: $\Leftrightarrow M=\overset{o}{M}$.

Andere Formulierung:
Eine Teilmenge $M\subseteq\mathbb{K}$ heißt offen, wenn es zu jedem $\xi\in O$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi)$ gibt mit $U_\varepsilon(\xi)\subseteq M$.
offene Intervalle, Endpunkte gehören nicht dazu, da $a\&b\notin M \Rightarrow$
$U_\varepsilon(a\&b)\not\subseteq M$.



2.) Ist $X\subseteq\mathbb{K}$, so heißt ein $O\subseteq X$ X-offen,
(bzw relativ offen bzgl X),
wenn es zu jedem $\xi\in O$ ein $U_\varepsilon(\xi)$ gibt, sodass $U_\varepsilon(\xi)\cap X\subseteq O$
gilt. # irgend ein $\varepsilon>0$

Achtung: In 2.4 Wird der Begriff Häufungswert behandelt.
Dieser gehört zu Folgen (siehe (2002)).
Der Häufungspunkt (HP) gehört zu Mengen

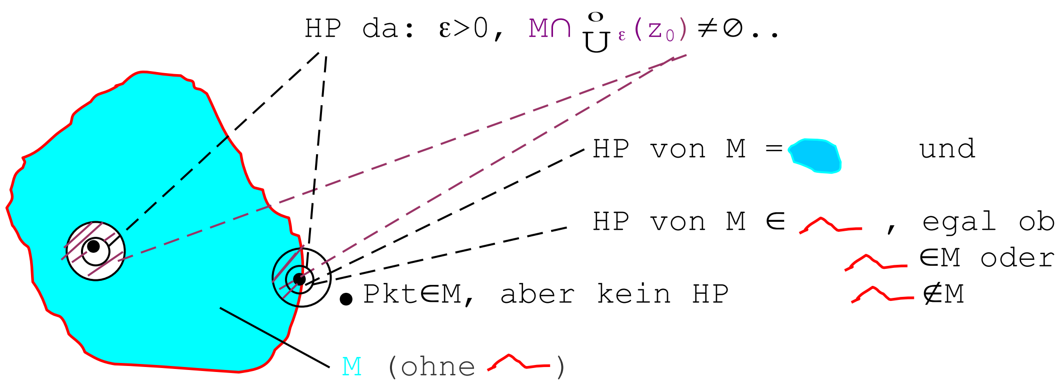
3.) $z_0\in\mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt (HP) von $M :\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$.

Andere Formulierungen:
Ein Punkt z_0 heißt Häufungspunkt (HP) einer Menge $D\subset\mathbb{K}$, falls in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ unendlich viele Punkte von D liegen.

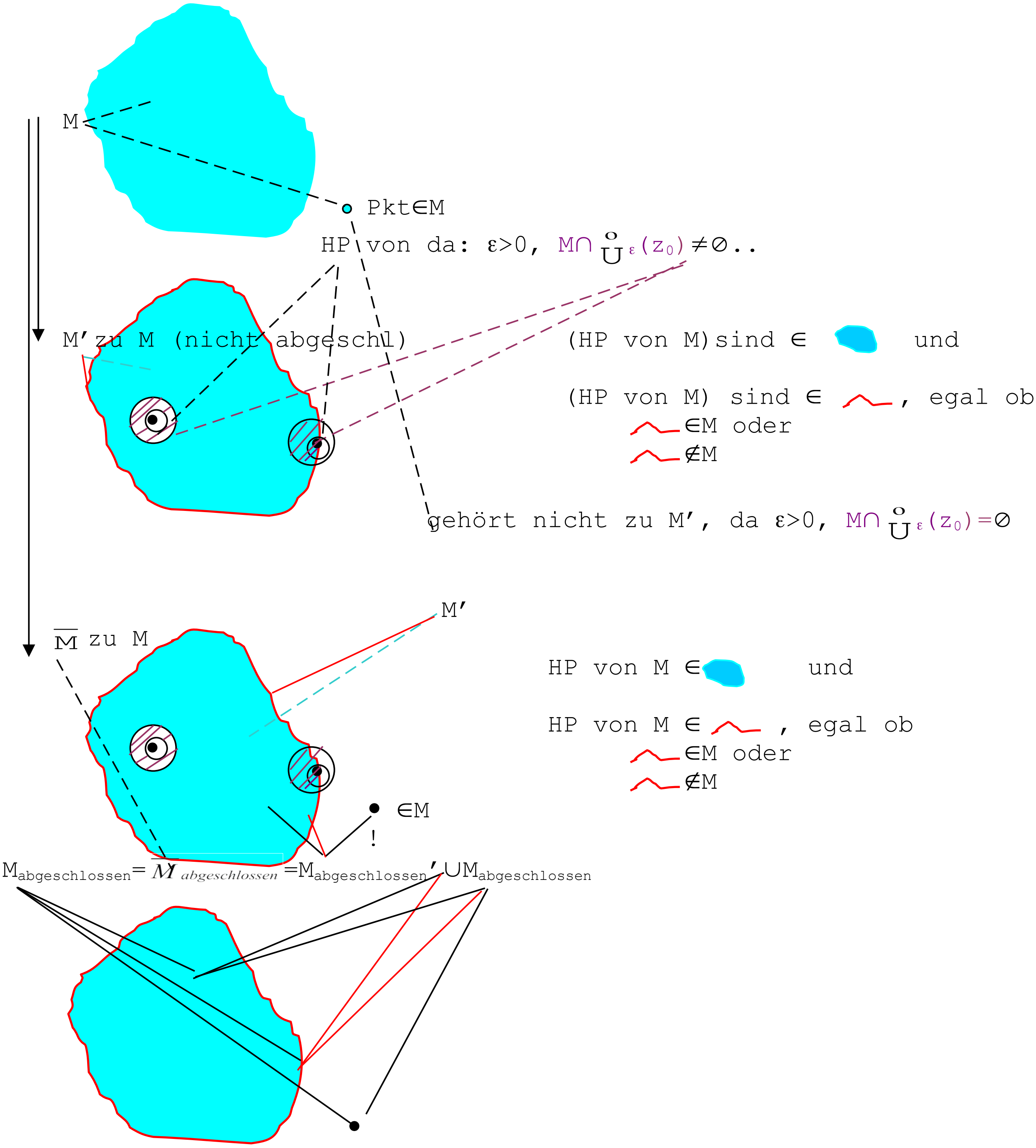
Bem: Äquivalent dazu:
1.) Mit $\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0):=U_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ (sog punktierte Umgebung von z_0)

gilt $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(z_0)\cap D\neq\emptyset \quad \forall\ \varepsilon>0$

2.) $\exists$ (z_n) mit $z_n\in D\setminus\{z_0\}$, sodass gilt: $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ (siehe auch S 4.1.1 4.)



4.) M' sei die Menge aller HP von M und
$\overline{M}$:=$M\cup M'$ die abgeschlossene Hülle von M.
M heißt abgeschlossen: $\Leftrightarrow$ $M=\overline{M}$ $\Leftrightarrow$ $M'\subset M$. # $M=\overline{M}=M\cup M'$ $\Leftrightarrow$ $M'\subset M$



Andere Formulierung
4*.) M abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus M liegt wieder in M

$(\forall\ (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n\in M,\ \lim_{n\to\infty} x_n=x:\ x\in M)$

4.) $\underbrace{\Leftrightarrow}_{S4.1.1\ 4.)\ siehe Seite\ 2208}$ 4*.)

5.) M heißt kompakt $\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt
Andere Formulierung:
5*.) M kompakt $\Leftrightarrow$
Jede Folge aus M besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder zu M gehört
Wozu Betrachtung von Teilfolgen?
$(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in M$ können sich beliebigen Werten von M
(vieleicht sogar allen) beliebig nahe nähern, aber $\exists$ eine
konvergente Teilfolge (d.h. die sich nur einem Wert von M annähert)
deren Grenzwert wieder zu M gehört......Richtig
6.) $z_0 \in \mathbb{K}$ heißt Randpunkt von M:$\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M \cap U_\varepsilon(z_0) \neq \emptyset$
und $\mathbb{K}\backslash M) \cap U_\varepsilon(z_0) \neq \emptyset$.
7.) $z_0 \in M$ heißt isolierter Punkt von M:$\Leftrightarrow$ $\exists\ \delta>0$ mit $M \cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = \emptyset$.
Andere Formulierung:
$z_0 \in D$ heißt isolierter Punkt von M, falls es ein $\rho>0$ gibt derart, daß für alle anderen Punkte $z \in D\backslash\{z_0\}$ gilt $|z-z_0| \geq \rho$.

Ist ein isolierter Punkt ein innerer Punkt?
1.) $z_0 \in M$ heißt innerer Punkt von M:$\Leftrightarrow$ $\exists\ \delta>0$ mit $U_\delta(z_0) \subset M$.
z_0 ist isolierter Punkt $\Rightarrow$ $\exists\ \delta>0$ mit $M \cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0) = \emptyset$ $\Rightarrow$
$\forall\ \delta>0\ \exists\ z_{\notin M} \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ $\Rightarrow$ $\forall\ \delta>0\ U_\delta(z_0) \not\subset M$

8.) $\infty(-\infty)$ ist ein uneigentlicher HP von M, falls eine Folge (z_n) aus M existiert mit $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty(-\infty)$.

S4.1.1(2205)
1.) Für $M \subset \mathbb{R}$ oder $M \subset \mathbb{C}$ gilt
a) $\overset{\circ}{M} = \bigcup_{O \subset M} O$ =Vereinigung aller offenen Teilmengen von M
b) $\overline{M} = \bigcap_{M \subset A} A$ =Durchschnitt aller geschlossenen Obermengen von M.
2.) $M \subset \mathbb{R}$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\backslash M$ ist abgeschlossen
$\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind offen und abgeschlossen.
$M \subset \mathbb{C}$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\backslash M$ ist abgeschlossen,
$\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind offen und abgeschlossen.
3.) • $M_1,...M_n$ offen $\Rightarrow$ $\bigcap_{j=1}^{n} M_j$ offen
Bem: M offen $\underset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ $M = \overset{\circ}{M}$ $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in M$ ist innerer Punkt

•• $M_1,...M_n$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $\bigcup_{j=1}^{n} M_j$ abgeschlossen.
••• I beliebige Indexmenge und M_i offen $\forall\ i \in I$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} M_i$ offen.
•••• $I \neq \emptyset$ bel. Indexmenge und M_i abgeschlossen $\forall\ i \in I$ $\Rightarrow$
$\bigcap_{i \in I} M_i$ abgeschlossen.
Bem: Die Vor $I \neq \emptyset$ wurde nur gemacht, da $\bigcap_{i \in \emptyset}$ nicht definiert ist

4.) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist HP von $M \subset \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine Folge $(x_n) \subset M\backslash\{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$.
$z_0 \in \mathbb{C}$ ist HP von $M \subset \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine Folge $(z_n) \subset M\backslash\{z_0\}$ mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$.

4.2(2300) **Funktionsgrenzwerte, Konvergenz von Funktionenfolgen**

D4.2.1(2300) Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$ und $f:M\to\mathbb{R}$.

1.) f(x) konvergiert gegen $a\in\mathbb{R}$ für $x\to x_0 :\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $f(x)\in U_\varepsilon(a)\ \forall\ x\in M\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ oder auch

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x\in M$ mit $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ oder $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a$.

2.) f(x) konvergiert einseitig von rechts (von links) gegen $a\in\mathbb{R}$ für $x\to x_{0+}$ $(x\to x_{0-})$ $:\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: |f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x\in M$ mit $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=a$.

Andere Formulierung:

$f: D\to\mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt aus D.

Einseitiger Limes: $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=y_0 \Leftrightarrow$

falls x_0 HP von $D\cap(x_0,(-)\infty)$ und falls

$\forall$ Folgen (x_n) aus $D\cap(x_0,(-)\infty)$ mit $x_n\to x_0$ gilt, ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$)

rechtsseitiger (linksseitiger) Limes von f(x), $x\to x_0$

3.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$):

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ c>0$ mit $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x>c$ (bzw $\forall\ x<-c$).

4.) (bestimmte Divergenz) $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (bzw. $-\infty$)$:\Leftrightarrow$

$\forall\ c>0\ \exists\ \delta>0$ mit $f(x)>c$ (bzw. $f(x)<-c$) $\forall\ x\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

Analog ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (bzw. $=-\infty$) und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty\,(-\infty)$ definiert

5.) Seien $f,g:M\to\mathbb{R}$ und $x_0\in M'$ gegeben.

$f(x)=O(g(x))$ für $x\to x_0 :\Leftrightarrow$

$\exists\ c>0\ \&\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)|\le c|g(x)|\ \forall\ x\in(M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0))$.

$f(x)=o(g(x))$ für $x\to x_0 :\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|\ \forall\ x\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Analog bei $x\to\infty$, $x\to-\infty$.

Bem: Analog zum Bew des Stzes über die Folgenstetigkeit kann man zeigen, dass genau dann $\lim_{x\to a_+} f(x)=y$ ist, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n>a$, welche gegen a konvergieren, die Folge $(f(x_n))$ gegen y konvergiert. Analoge Aussagen gelten in allen anderen Fällen, inklusive der Fälle $y=\infty$ bzw $y=-\infty$.

Andere Formulierungen:

- Geg $a,b\in\overline{\mathbb{R}}=(\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\})$, $a<b$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$
  f konvergiert gegen $y\in\mathbb{R}$, wenn x von oben gegen a strebt, falls:
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\ c\in(a,b)\ \forall\ x\in(a,c): |f(x)-y|<\varepsilon$ gilt.
  Schreibweise: $\lim_{x\to c_+} f(x)=y$.
  Analog
  f konvergiert gegen ein $y\in\mathbb{R}$, wenn x von unten gegen b strebt, falls:
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\ c\in(a,b)\ \forall\ x\in(c,b): |f(x)-y|<\varepsilon$ gilt.
  Schreibweise: $\lim_{x\to c_-} f(x)=y$

•• $\lim_{x\to c} f(x)=y$ mit $c\in(a,b) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c_+} f(x)\ \&\ \lim_{x\to c_-} f(x)$, $\lim_{x\to c_+} f(x)=\lim_{x\to c_-} f(x)=y$

••• $c\in(a,b)$, $\exists \lim_{x\to c_+} f(x)\ \&\ \lim_{x\to c_-} f(x)$, $k\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to c_+} f(x), \lim_{x\to c_-} f(x)\le k$,
$\lim_{x\to c_+} f(x)\neq\lim_{x\to c_-} f(x)$,
dann heißen c Sprungstelle von f und $\lim_{x\to c_+} f(x)-\lim_{x\to c_-} f(x)$ Sprunghöhe von f an dieser Stelle.

•••• f für $a\in\mathbb{R}$ (zu (a,b)) definiert, $\exists \lim_{x\to c_+} f(x)$ dann ist die Sprunghöhe als $\lim_{x\to a_+} f(x)-f(a)$ definiert.
Analoge ist eine Sprungstelle bzw -höhe bei b definiert

D4.2.1' (2302) (komplexe Zahlen, Körper $\mathbb{K}$)
Sei $D\subset\mathbb{K}$, $z_0\in D'$, d.h. z_0 ist HP, $f: D\to\mathbb{K}$ gegeben.

1.) f(z) konvergiert gegen $w_0\in\mathbb{K}$ für $z\to z_0$, falls ein $w_0\in\mathbb{K}$ existiert, sodass gilt:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $|f(z)-w_0|<\varepsilon\ \forall\ z\in(D\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0))$.
Schreibweise: $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ oder $f(z) \underset{z\to z_0}{\to} w_0$.

2.) Für $f: D\to\mathbb{K}$, $z_0\in D'$ gilt $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty\ :\Leftrightarrow$
$\forall\ c>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(z)|>c\ \forall\ z\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ (Bestimmte Divergenz).

3.) Seien $f,g: D\to\mathbb{K}$ und $z_0\in D'$ gegeben.
$f(z)=O(g(z))$ für $z\to z_0:\Leftrightarrow$
$\exists\ c>0$ und $\exists\ \delta>0$ mit $|f(z)|\le c|g(z)|\ \forall\ z\in D\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$.
$f(z)=o(g(z))$ für $z\to z_0:\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(z)|\le\varepsilon|g(z)|\ \forall\ z\in D\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$.

Bem: f(z) ist unabhängig von $f(z_0)$, falls überhaupt f(z) für $z=z_0$ definiert ist.

D4.2.2(2303) Monotone Funktion
Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall. $f:I\to\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend(fallend) auf $I:\Leftrightarrow\ \forall\ x_1,x_2\in I$ mit $x_1\le x_2$ gilt $f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$ $(f\nearrow,\searrow)$.
$f:I\to\mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend (fallend) auf $I:\Leftrightarrow$
$\forall\ x_1,x_2\in I$ mit $x_1<x_2$ gilt $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ $(f\uparrow,\downarrow)$
Ist f weder monoton wachsend noch monoton fallend, so sagen wir, f ist nicht monoton.

D4.2.3(2304) Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{R}$ bzw $f:M\to\mathbb{C}$ heißt beschränkt auf $M:\Leftrightarrow\ \exists\ c>0$ mit $|f(z)|\le c\ \forall\ z\in M$.

S4.2.1(2304) Konvergenzkriterien für Funktionen

- **Folgenkriterium**

Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbb{R},(\mathbb{C})$
Beh: $\lim\limits_{x\to x_0} f(z)=a\ \Leftrightarrow\ \forall$ Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=a$.
Andere Formulierung:
Vor: $D\to K$ und ein HP $z_0\in D$ gegeben.
Beh: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0\ \Leftrightarrow\ f(z_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0\ \forall\ (z_n)$ mit $z_n\in D\setminus\{z_0\}\ \forall\ n\ \&\ z_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$

Bem:1.)Beachte $z_n\neq z_0\ \forall\ n$ (d.h. w_0 hängt nicht von $f(z_0)$ ab.
2.)Falls $z_0\in D$, so gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\ \Leftrightarrow$
$\forall$ Folgen (z_n) mit $z_n\in D\ \forall\ n\ \&\ z_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ gilt: $f(z_n)$ konvergiert.
3.) $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$.(Cauchy-Krit)

Andere Formulierungen:
Es seien eine Funktion $f:D\to K$ und ein HP z_0 von D gegeben.
Dann gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existiert $\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_{(\varepsilon_0)}>0:|f(z)-f(z')|<\varepsilon\ \forall\ z,\ z'\in \overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)\cap D$.

- - **Cauchy-Kriterium**

$\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

Andere Formulierungen:
Es seien eine Funktion $f:D\to K$ und ein HP z_0 von D gegeben.
Dann gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existiert $\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_{(\varepsilon_0)}>0:|f(z)-f(z')|<\varepsilon\ \forall\ z,\ z'\in \overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)\cap D$.

S4.2.2(2310) Grenzwertregeln

Vor: Geg. $f,g:D\to\mathbb{K}$ und HP z_0

1.) Beh: Existieren $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ & $\lim_{z\to z_0} g(z)=w_1$, so existieren folgende Limites und es gilt:

(.) $\lim_{z\to z_0}(\alpha f(z)+\beta g(z))=\alpha w_0+\beta w_1$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{K})$ (..) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=w_0w_1$

(...) $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{w_0}{w_1}$ falls $w_1\neq 0$

2.) $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ und $a<\alpha$ ($>\alpha$ bzw $\neq\alpha$) $\Rightarrow$ $\exists$ $\delta>0$: $f(x)<\alpha$ $(>\alpha,\neq\alpha)$ $\forall$ $x\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

3.) Ist M=I ein Intervall und $\exists$ $\delta>0$ sodass f auf $I\cap(x_0-\delta,x_0)$ bzw $I\cap(x_0,x_0+\delta)$ monoton und beschränkt ist, so $\exists$ $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)$ bzw $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

4.) Seien $M,H\subset\mathbb{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbb{R}$, $z_0\in M'$.

(●) Sei $y_0:=\lim_{z\to z_0} f(z)$, dann gilt $y_0\in\overline{H}$.

(●●) Falls $\lim_{y\to y_0} h(y)=c$ existiert, so $\exists$ $\lim_{z\to z_0} h(f(z))=c$

Bem: S4.2.2 1.) gilt analog für $M\subset\mathbb{C}$, $f,g:M\to\mathbb{C}$, $H\subset\mathbb{C}$, $h:H\to\mathbb{C}$
Die Grenzwertregeln gelten auch bei uneigentlichen HP mit eigentlichen Grenzwerten.

Andere Formulierungen:

Vor: $f: D\to D_1\subset\mathbb{K}$, z_0 HP von D: $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0\in D_1$

$g: D_1\to\mathbb{K}$: $\lim_{z\to z_0} g(z)=g(w_0)\,D_1$

Beh: $\lim_{z\to z_0} g(f(z))=g(w_0)=\lim_{w\to w_0} g(w))$

S4.2.3(2320)

Sei $f:I\to\mathbb{R}$ monoton wachsend (fallend) und beschränkt, dann existiert $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ $\forall$ HP von $I\cap(-\infty,x_0)$ $(I\cap(x_0,\infty))$

D4.2.4(2350) (Körper: $\mathbb{K}$, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

● Eine Funktionenfolge ist eine Folge $f_1,f_2,...$ von Funktionen f_i: $\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, Definitions ($D\subset\mathbb{K}$)- und Zielmengen ($Z\subset\mathbb{K}$) können auch andere Mengen sein, z.B. Intervalle, müssen jedoch für alle f_i dieselben sein: $f: D\times\mathbb{N}\to Z$, $(x,n)\mapsto f_n(z)$

●● Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt punktweise konvgt gegen eine Funktion $f: D\to\mathbb{K}$, wenn gilt $\forall$ $z\in D$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N_{(\varepsilon,z)}$: $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ $\forall$ $n>N_{(\varepsilon,z)}$
Schreibweise: $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z\in D$, diese $f:D\to\mathbb{K}$ heißt Grenzfunktion
Für punktweise konvergente $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert
$f(z)$: $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z\in D$ die sogenannte Grenzfunktion

Andere Formulierung:

Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent, falls für jedes $z\in D$ die Folge $(f_n(z))$ konvergent ist. Ist dies der Fall, so heißt $f:D\to\mathbb{K}$, mit $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)\ \forall\ z\in D$, die Grenzfunktion der Folge.

Bsp: $D=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$, $f_n(x)=x^n \Rightarrow f_n$ konvergiert punktweise gegen

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Bew: $x\in[0,1) \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow x^n<\varepsilon \Leftrightarrow n*\underbrace{\overbrace{\ln x}^{<1}}_{<0}<\ln\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x} \underbrace{\Rightarrow}_{Wahl}$

$$N_{(\varepsilon,x)}=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]+1$$

●●● Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter gilt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq N\ \forall z\in D: |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

Andere Formulierung frei nach Uni Saarbrücken (ohne Forderung der <u>punktweisen Konvergenz</u> ...aber f(x) muß existieren)

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt auf D gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion f: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq N\ \forall z\in D: |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

Äquivalente andere Formulierung frei nach Wikipedia

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine f wenn $\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in D}|f_n(z)-f(z)|=0$

Bem: 1.) Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

Gleichmäßige Konvergenz $\not\Leftarrow$ Konvergenz

2.) Bei glm Konvergenz gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_{1(\varepsilon)}: \underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_{1(\varepsilon)}$

d.h. $\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$ (I beliebiges Intervall)

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ x_n: \underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq|f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \ \forall\ n>n_{0(\frac{\varepsilon}{2})}$

D4.2.5(2355)

● Geg beliebige Menge $D\subset\mathbb{K}$, sowie Funktionenfolge $g_k:D\to\mathbb{K}\ \forall\ k\in\mathbb{N}$. Dann nennen wir $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ eine Funktionenreihe auf D.

Bsp Potenzreihen

●● Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ heißt auf D punktweise konvergent,

---

falls $\forall\ z\in D$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ konvergent ist und die Grenzfunktion f ist dann durch $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)\ \forall\ x\in D$ gegeben.

●●● Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls sie punktweise konvergiert(gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter gilt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \forall\ z\in D: n\geq N \Rightarrow |\sum_{k=1}^{n} g_k(z)-f(z)|<\varepsilon$.

Also ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$

äquivalent mit der gleichmäßigen Konvergenz der Folge ihrer Partialsummenfolge

Andere Formulierung:

Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf X gegen S:

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z)=S \ \forall\ x\in X$ $(S_n:=f_1+f_2+\dots f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S)$

Andere Formulierung

$(\sum_{k=1}^{n} f_k(z))_{n=1}^{\infty}$, f_k: $D\to\mathbf{K}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen f: $D\to\mathbf{K}$ wenn die
Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbf{N}\ \forall\ n\geq N\ \forall\ x\in D$: $|\sum_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)|<\varepsilon$

Bem: • Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz
Gleichmäßige Konvergenz $\not\Leftarrow$ Konvergenz

• • Bei glm Konvergenz gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_{1(\varepsilon)}: \underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_{1(\varepsilon)}$

d.h. $\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ x_n$: $\underbrace{\sup}_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq|f_n(x_n)-f(x_n)|+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \ \forall\ n>n_{0(\frac{\varepsilon}{2})}$

S4.2.4(2356)
Funktionenfolge Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz
Vor:Sei $D\subset\mathbf{K}$ (z.B $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$) f_n:$D\to\mathbf{K}$ für $n\in\mathbf{N}$ gegeben.
Beh:$(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf D (gegen Funktion $f(z):=D\to\mathbf{C}$)
$\Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0(\varepsilon)$
$\forall\ z\in D$

Bem: Eine Funktionenreihe konvergiert gleichmäßig auf I $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbf{N}$: $|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_1(\varepsilon)\ \ \forall\ p\geq1,\ \ \forall\ x\in I$

• • Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ist genau dann auf D gleichmäßig konvergent,

wenn $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbf{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbf{N}\ \forall\ x\in D: m\geq n\geq N \Rightarrow |\sum_{k=n}^{m} g_k(x)|<\varepsilon$.

Bem:Seien $f_n(z)$: $M\to\mathbf{C}$ $n\in\mathbf{N}$, gegeben. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig uf M

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $\left|\sum_{\nu=m+1}^{n} f_\nu(z)\right|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_0(\varepsilon)$ und

$\forall\ z\in M$. Man wende S4.5.1 auf $F_n(z):=\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)$ $n\in\mathbf{N}$, an.

S4.2.5(2361) Majorantenkriterium von Weierstrass
Vor:Sei $D\subset\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) und $f_n:D\to\mathbb{C}$ für $n\in\mathbb{N}$ gegeben.

Sei $|f_n(z)|\le a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \&\ \forall\ z\in D\ \&\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.

Aussage: $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sind gleichmäßig auf M konvergent.
Andere Formulierung:

Vor: (f_n), f_n: $I\to\mathbb{R}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\ge 0$, $\ast\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k<\infty$, $\ast\ast\ |f_k(x)|\le a_k\ \forall\ x\in I\ \forall k$

Aussage: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist gleichmäßig konvergent.

4.3(2400) **Stetige Funktionen**

Im Folgenden betrachten wir Funktionen auf einem meist fest gewählten Definitionsbereich $D\subset\mathbb{K}$, sowie einen weiteren Punkt $x_0\in D$. Der für uns wichtigste Fall ist der, wenn D ein Intervall in $\mathbb{R}$ und x_0 ein Punkt im Inneren des Intervalls oder einer der Randpunkte ist, aber meist spielt die genaue Art von D und x_0 keine Rolle.

$D\to\mathbb{K}$, z_0 Häufungspunkt von D, $D\subset\mathbb{K}$,

$$\lim_{z\to z_0} f(z_0)=y_0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon:\ |f(z)-\underbrace{y_0}_{f(z_0)}|<\varepsilon\ \forall\ z\in U_{\delta_\varepsilon}(z_0)\cap D \Leftrightarrow$$
$$\forall\ (z_n),\ (z_n)\in D\setminus\{z_0\},\ z_n\to z_0 \text{ gilt: } f(z_n)\to y_0$$

Wir betrachten hauptsächlich reellwertige Funktionen aus einem Intervall

D4.3.1(2400)
Sei $D\subset\mathbb{R}$. Dann heißt f: $D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in D$:⇔
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(x)\in U^{\varepsilon}(f(x_0))\ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$ oder äquivalent....
***($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).
f heißt stetig auf $A\subset D$:⇔ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.

Bem:Ist $x_0\in D\cap D'$, so ist f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Für $a,b\in\mathbb{R}$, a<b heißt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ linksseitig stetig in einem Punkt $x_0\in(a,b]$, wenn $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)=f(x_0)$

Analog wird die rechtsseitige Stetigkeit definiert. Offenbar ist f stetig an einer Stelle $x_0\in(a,b)$, wenn es dort sowohl rechts-, als auch linksseitig stetig ist.
Wir nennen f auch stückweise stetig, wenn f bis auf endlich viele Ausnahmestellen $x_j\in[a,b]$ stetig ist und wenn an diesen Stellen x_j noch die einseitigen Grenzwerte existieren, d.h., wenn alle Unstetigkeitsstellen Sprungstellen sind. Es ist nicht schwer, zu zeigen,
dass eine auf [a,b] stückweise stetige Funktion dort beschränkt ist.

D4.3.1'(2401) komplexe Mengen

Sei $M \subset C$. Dann heißt $f: M \to C$ stetig im Punkt $z_0 \in M$: $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta>0: f(z) \in U^{\varepsilon}(f(z_0)) \ \forall \ z \in M \cap U_\delta(z_0)$.

f heißt stetig auf $A \subset M$: $\Leftrightarrow$ f ist in jedem $z_0 \in A$ stetig.

Bem:a) Isolierter Pkt von D: $\exists \ \rho>0: |z-z_i| \geq \rho \ \forall \ z \in D \setminus \{z_i\}$.

Ist $z_0 \in M$ isolierter Punkt von M, so ist f in z_0 stetig, weil (***)gilt, sofern $\delta \leq \rho$.

Andere Formulierung:

$\forall \ z_i \in D$ gilt (***) sofern $\delta \leq \rho$, d.h. jede auf D definiert Funktion ist stetig in allen isolierten Punkten

b) Ist $z_0 \in M \cap M'$, so ist f stetig in $z_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Ist f in z_0 nicht stetig, so heißt f in z_0 eine Unstetigkeitsstelle von f.

c) Sei $f: D \to K$ stetig in $x_0 \in D$. Beachte, dass (***) trivialerweise richtig bleibt, wenn wir δ verkleinern; insofern ist δ durch ε nie eindeutig festgelegt. Es genügt aber zum Nachweis der Stetigkeit für jedes $\varepsilon>0$ ein (möglicherweise sehr kleines) $\delta>0$ zu finden, für welches (***) gilt. Wir nennen manchmal ein solches δ auch ein zu ε gehörendes δ.

Andere Formulierung:

Sei eine Funktion $f: D \to K$ gegeben. Wir sagen, dass f in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist, wenn folgendes gilt:

(***) $\forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ \delta>0 \ \forall \ x \in D: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Falls f in jedem Punkt von D stetig ist, sagen wir kurz:

f ist auf D stetig.

Andere Formulierung:

Eine Funktion $f: D \to C$, heißt stetig in

(.) einem Punkt $z_0 \in D$, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0}$ existiert), d.h.

„$z_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} z_0$" $\Rightarrow f(z_n) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f(z_0)$ oder $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(\lim\limits_{z \to z_0} z)$

\# Herleitung dieser Def aus (***) siehe S4.3.3

Eine Funktion $f: I \to R$, heißt stetig in

(..)einem Teilintervall $J \subset I$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in J$ stetig ist

Bem:(.)Es gilt f ist stetig in $x_0 \in I$

$\Leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ \delta_\varepsilon>0: |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \ \forall \ x \in U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I$

$\Leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ \delta_\varepsilon>0 \ f(U_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$

(..)Für Funktion $f: U_\delta(z^*) \to C$ ($z^* \in C$, $\delta>0$) können wir völlig analog

Stetigkeit von f in $z_0 \in: U_\delta(z^*)$ definieren

Wir sagen, dass f auf D einer Lipschitzbedingung genügt,falls eine Konstante $L \in R_+$ existiert, sodass $|f(x_0)-f(x_1)| \leq L|x_0-x_1| \ \forall \ x_0, x_1 \in D$.

Jedes solches L heißt auch Lipschitzkonstante für f (auf D)

$\sqrt{x}$ (im Nullpkt senkrecht) erfüllt Lipschitzbedingung nicht

Bez:a)Es seien eine Funktion $f: I \to R$ und eine Menge $M \subset I$ Gegeben. Dann bezeichnen wir mit

(.) $\sup\limits_{x\in M} f(x) := \begin{cases} \sup(f(M)), \textit{ falls } f(M) \textit{ nach oben beschränkt ist} \\ \infty, \textit{ falls } f(M) \textit{ nicht nach oben beschränkt ist} \end{cases}$

(..) $\inf\limits_{x\in M} f(x) := \begin{cases} \inf(f(M)), \textit{ falls } f(M) \textit{ nach unten beschränkt ist} \\ -\infty, \textit{ falls } f(M) \textit{ nicht nach unten beschränkt ist} \end{cases}$

das Supremum bzw das Infimum von f auf M.

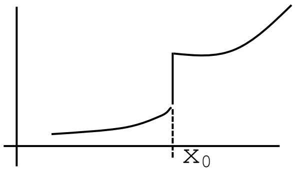
Falls existent: $\max\limits_{x\in M} f(x) := \max f(M)$ das Maximum,

$\min\limits_{x\in M} f(x) := \min f(M)$ das Minimum von f auf M

Bem: Ist $f: I \to \mathbb{R}$ nicht stetig in $x_0 \in I$, so bezeichnet man x_0 auch als Unstetigkeitsstelle von f, z.B.

(.) Sprungstellen

$\lim\limits_{x\to x_0^-} \neq \lim\limits_{x\to x_0^+}$



(..) Oszillationsstellen

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht

(...) $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

ist in keinem Punkt $x_0 \in [0,1]$ stetig

b) Wir sagen $f: I \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn f stetig auf I ist.

S4.3.1 (2404) Geg sei ein beliebige Menge $D \subset \mathbb{K}$ sowie Funktionen $f_n, g_k: D \to \mathbb{K}$ $\forall$ $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

a) Sind alle f_n in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig und ist die Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0.

Andere Formulierung:

Vor: (.) Sei $M \subset \mathbb{C}^{\text{v}}$ $f_n: M \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, auf M gleichmäßig konvergent gegen $f: M \to \mathbb{C}$.

(..) $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(z)$ stetig in $z_0 \in M$ (bzw auf M).

Beh: f(z) ist in z_0 (bzw. auf M) stetig

b) Sind alle g_k in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig und ist die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0.

S4.3.2 (2409) Expotential-, Trigonometrische, hyperbolische Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

S4.3.3(2410)Folgenstetigkeit

$f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $z_0\in D \Leftrightarrow$ für jede Folge

(z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z_0$ gilt auch $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(z_0)$.

S4.3.4(2410) Rechenregeln für Stetigkeit

Beh:1.) Vor:$M\subset\mathbb{R}$, f,g mit $M\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.

Aussage: $f(x_0)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$) $\Rightarrow$

$\exists\ \delta>0$ mit $f(x)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$) $\forall\ x\in M\cap U_\delta(x_0)$.

2.) Vor:$M\subset\mathbb{K}$, f,g mit $M\to\mathbb{K}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.

$\alpha f+\beta g$ stetig in x_0 $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{K}$),

fg stetig in x_0,

f/g stetig in x_0, falls $g(x_0)\neq 0$ (und folglich $g(x)\neq 0$ in $U_\delta(x_0)\cap M$).

3.) Vor: $f:D\to D_1$ stetig in $x_0\in D$ und $g:D_1\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$ bzw $f(x_0)\in D_1$.

Hintereinanderausführung $g\circ f:D\to\mathbb{K}$ stetig in x_0.

Andere Formulierung:

$f: M\to\mathbb{R}$ stetig in $x_0\in M$ $\wedge$ $h: f(M)\to\mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$ $\Rightarrow$

$(h\circ f)(x)=h(f(x))$ stetig in x_0

Bew: Aus Rechenregeln für Folgen und S4.3.2

4.) $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu$, $R>0$ ist stetig $\forall$ z: $z\in U_R(z_0)$

5.) Vor: $\underset{\subset C}{M}$ kompak**t, f_n**: $M\to\mathbb{R}$ **stetig auf** M $\forall$ **$n\in\mathbb{N}$,**

$f_n(z)\nearrow f(z)$ $(n\to\infty)$ $\forall$ z, f: $M\to\mathbb{R}$ stetig auf M.

Aussage $(z)\to f(z)$

S4.3.5 (2450)

Vor: Die PR $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR $R>0$.

Aussage:f(z) ist stetig in jedem Punkt $U_R(z_0)$.

S4.3.6(2455) Identitätsssatz für Potenzreihen

1.)Vor: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ mit KR, $R>0$ gegeben.

Beh:Für $z_1\in U_R(z_0)$: $\lim\limits_{z\to z_1} f(z)=f(z_1)$

2.) Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen

Vor:$f(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $\varphi(z):=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ haben KR, $R>0$.

$\exists$ eine Folge $(z_n)\subset U_R(z_0)\setminus \underset{\in U_R(z_0)}{z_0^*}$ mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z_0^*\in U_R(z_0)$ & $f(z_n)=\varphi(z_n)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

Beh:$a_k=b_k$ $\forall$ $k\in\mathbb{N}_0$ und damit $f(z)=\varphi(z)$ $\forall$ $z\in U_R(z_0)$.

Bem:(.)Polynome sind spezielle Potenzreihen

(..)Koeffizientenvergleich Bsp $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

(…)Gilt $f(z_n)=0$ $\forall$ n $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z_0^*$ $\Rightarrow$ $f(z)\equiv 0$

(….)Nullstellen von sin, cos, sinh, cosh können sich in keinem Punkt von $\mathbb{C}$ häufen.

4.4(2500) **Hauptsätze über stetige Funktionen**

S4.4.1(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)
Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.
Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall$ y $\exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.
Andere Formulierung:
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Sei ferner y eine beliebige Zahl mit $f(a)\leq y\leq f(b)$ oder $f(b)\leq y\leq f(a)$. Dann gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.
Bem: Falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0$ und $f(b)>0$, so existiert mindestens eine Nullstelle $\xi\in(a,b)$ von f.
2.) $J:=f(I)$ ist ein Intervall $\subset\mathbb{R}$.

D4.4.1(2501)Sei $D\subset\mathbb{K}$ und sei $f:D\to\mathbb{K}$.
Ein Punkt $x_0\in D$ heißt Nullstelle von f, falls $f(x_0)=0$ ist.
Bem:Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und seien $f(a)\geq 0$ und $f(b)\leq 0$ oder umgekehrt. Dann hat f mindestens eine Nullstelle auf [a,b] und eine dieser Nullstellen kann mit einem der folgenden Verfahren näherungsweise berechnet werden:

1. Bisektionsmethode
   Falls $f(a)=0$ oder $f(b)=0$, ist nichts mehr zu tun. Andernfalls seien $a_0=a, b_0=b$. Dann haben $f(a_0)$ und $f(b_0)$ unterschiedliche Vorzeichen und somit ist $f(a_0)f(b_0)<0$. Sei jetzt $x=(a_0+b_0)/2$. Falls $f(x)=0$ ist, haben wir eine Nullstelle gefunden. Falls nicht, kann $f(a_0)f(x)<0$ sein und in diesem Fall seien $a_1=a_0$, $b_1=x$ gesetzt. Im anderen Fall gilt $f(b_0)f(x)<0$ und wir setzen $a_1=x$, $b_1=b_0$. In beiden Fällen ist $a_1<b_1$ und $f(a_1)f(b_1)<0$.
   Sind allgemein schon Zahlen a_n,b_n mit $a_n<b_n$ und $f(a_n)f(b_n)<0$ gegeben, so sei jetzt $x=(a_n+b_n)/2$. Wenn $f(x)=0$ ist, stoppen wir das Verfahren. Wenn $f(a_n)f(x)<0$ ist, seien $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=x$ gesetzt. Wenn dagegen $f(b_n)f(x)<0$ ist, seien $a_{n+1}=x$, $b_{n+1}=b_n$ gesetzt. Insgesamt sehen wir, dass dieser Algorithmus entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullfolge von f findet oder aber 2 Zahlenfolgen $(a_n),(b_n)$ liefert, für die immer $a_n<b_n$ und $f(b_n)f(x)<0$ ist, so dass nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f im Intervall (a_n,b_n) liegen muß. Nach Konstruktion ist (a_n) wachsend und (b_n) fallend, und $b_n-a_n=(b-a)2^{-n}$. Also folgt Konvergenz beider Folgen gegen denselben Grenzwert a, und dieser muss dann Nullstelle von f sein.(siehe auch oben)
2. Regula Falsi
   Wir gehen genau wie bei der Bisektionsmethode vor, nur setzen wir in jedem Schritt x gleich der Schnittstelle der Geraden durch $(a_n,f(a_n))$ und $(b_n,f(b_n))$ mit der x-Achse,
   d.h. $x=(a_nf(b_n)-b_nf(a_n))/(f(b_n)-f(a_n))$.

Verfahren mit schnellerer Konvergenz gegen die Nullstelle siehe später Newtonverfahren.

S4.4.2(2510)
a) Vor: $f:I\to \mathbb{R}$ stetig.
Beh: f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton. (genau dann injektiv, wenn...)

b) $X\subseteq \mathbb{R}$, $K\subseteq X$, K kompakt, f stetig auf K $\Rightarrow$ f(K) kompakt
(das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt

S4.4.3(2530) Umkehrfunktion und Stetigkeit
Vor: • Intervall $I\subset\mathbb{R}$,
•• $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, d.h. J=f(I) $\underset{ZWS\,4.4.1\,Bem\,2.)}{\Rightarrow}$ J:=f(I) ein Intervall.
••• $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton

Aussage: Auf dem Intervall J=f(I) gilt
• Zu f $\exists$ im gleichen Sinn wie f streng monotone f^{-1}
•• Zu f $\exists$ stetige f^{-1} auf dem Intervall J=f(I)

(2531)Korollar S4.4.2
(.) log x: $(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend
Bew: $e^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ bijektiv, $\uparrow$ und stetig $\underset{S\,4.4.3}{\Rightarrow}$ Beh
(..) sinh x: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist $\uparrow$ und stetig, $f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ d.h. er hat
Umkehrfunktion: Arsinh: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\uparrow$ und stetig.
(...) cosh x: $[0,\infty)\to[1,\infty)$ ist $\uparrow$ und stetig und surjektiv, seine
Umkehrfunktion Arcosh x: $[1,\infty)\to[0,\infty)$ ist $\uparrow$ und stetig.

S4.4.4(2532)
a) sin x>0 $\forall$ $x\in(0,2]$
b) cos x ist im Intervall [0,2] $\downarrow$
#c) cos x ist im Intervall $[0,\pi]$ $\downarrow$
d) Die Funktion cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle x_0, welche im
Intervall (1,2) liegt. Es gilt $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ für $0<x\le 2$.
e) cos x>0 $\forall$ $x\in[0,\pi/2)$

D4.4.2 (2535) Die reelle Zahl $2*\underset{aus\,S\,4.4.4\,d)}{x_0}$ heißt π
Bem: (.) π ist eine reelle transzendente Zahl, π=3,14159265358979.
(..) Es gilt auf (0,2] (analoger Bew wie oben:
α) $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x \Rightarrow \sin\pi/2>0$ und ferner (Additionsth):
β) $\sin(\pi/2+\pi/2)=\sin(\pi)=2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)=0$ da $\cos(\pi/2)=0$
γ) $\sin(\pi/2)=1$, (da $(\cos^2(\pi/2)+\sin^2(\pi/2)=1$, $\sin\pi/2\underset{\alpha)}{>}0$)
δ) $\cos\pi=\cos^2(\pi/2)-\sin^2(\pi/2)=-1$

Andere Formulierung, Definition und Satz
cos hat im Intervall [0,2] genau 1 Nullstelle ξ, $\pi=2\xi$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$

S4.4.5(2535) $\exp(i*\frac{\pi}{2})=i$, $\exp(i*\pi)=-1$, $\exp(i*\frac{3\pi}{2})=-1$, $\exp(2\pi*i)=1$

S4.4.6(2537) Periodizitäten und Idenditäten der trigonometrischen
Funktionen

Es gilt für $x\in\mathbb{R}$ bzw $z\in\mathbb{C}$:

a) $\sin(x+\pi/2)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi/2)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$

b) $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, wir sagen dann, dass der Sinus und der Cosinus "2π- periodisch" sind, dabei ist $\lambda=2\pi$ die kleinste positive Zahl mit dieser Periodizitätseigenschaft und wir nennen diese Zahl die Periodenlänge.

c) Aufgrund dieser Überlegungen ist $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ und die Periodenlänge 2π. Analog für den Cosinus.

d) $e^z=e^{z+2k\pi i}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

e) $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$, $\sin x>0$ auf $(0,\pi)$,
$\cos x=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\pi/2$ mit $k\in\mathbb{Z}$, $\cos x>0$ auf $(-\pi/2,\pi/2)$,
$(-1)^k\cos x>0\ \forall\ x\in((k-\pi/2)(k-\pi/2))$

f) Wertetafel

f x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin x	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	0

Bem: (.) Sinus ist eine ungerade Funktion $\Rightarrow \sin x<0$ auf $(-\pi,0)$
$\cos x<0$ auf $(\pi/2,3\pi/2)$.

(..) Sinus und Cosinus haben auch im Komplexen nur die oben genannten reellen Nullstellen, damit ist auch Definitionsbereich von tan z und cot z Klar.

g) Aus obigen Eigenschaften und S4.4.4 :

$\cos: [0,\pi]\to[-1,1]\downarrow$, $\sin: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]\uparrow$,

$\tan: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}\uparrow$, $\cot: [0,\pi]\to\mathbb{R}\downarrow$

obige Funktionen sind surjektiv und streng monoton, deshalb

D4.4.3(2540) Umkehrfunktionen zu cos, sin ,tan und ctan sind die Arcusfunktionen

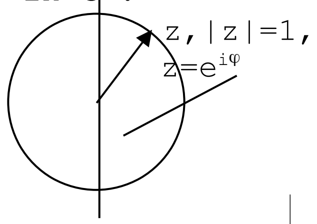
$\arccos: [-1,1]\to[0,\pi]$, $\arcsin: [-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

$\arctan: \mathbb{R}\to(0,\pi]$ $\quad$ $\mathrm{arcctan}: \mathbb{R}\to(0,\pi]$

Bem: S4.4.3 $\Rightarrow$ Die Arcusfunktionen sind streng monoton und auf ihrem Definitionsbereich stetig

S4.4.7(2541)Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{C}$.

Zu $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$ existiert genau ein $\varphi\in(-\pi,\pi]$ mit $z=e^{i\varphi}$.

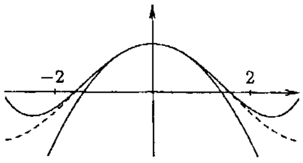


Graphen trig. Funktionen

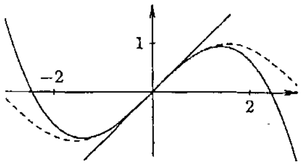
Für $0\le x<2$ gilt

$$1-\frac{x^2}{2} \le \cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$$

$$x-\frac{x^3}{6} < \sin x < x$$



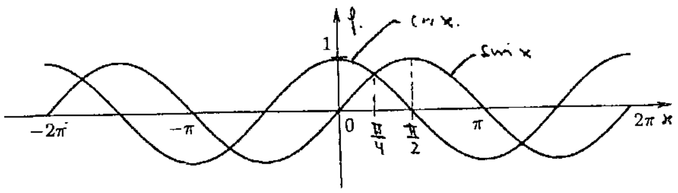
Einschließung des Cosinus



Einschließung des Sinus

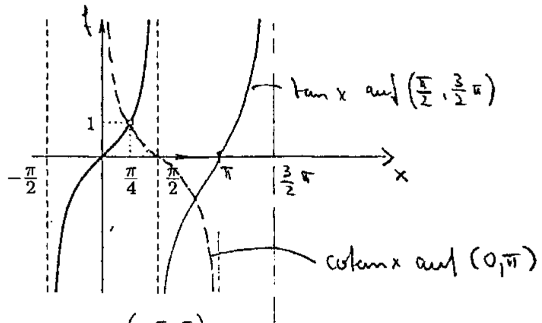
Graphen: Sinus, Cosinus

Graphen: Sinus, Cosinus



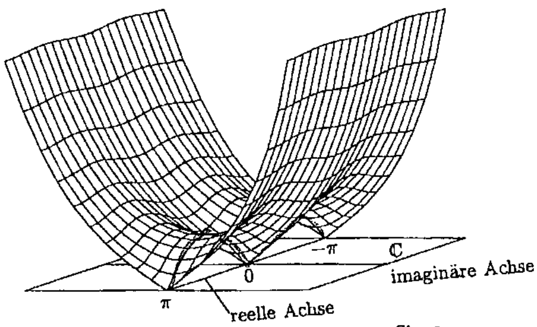
Cosinus und Sinus auf $\mathbb{R}$

Tangens, Cotangens



Tangens in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Bem: Der komplexe Sinus ist unbeschr.



Betrag des komplexen Sinus

Bem: Die stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von sinh heißt Area sinus hyperbolicus. Bez: Arsinh

S4.4.8 (2541) Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Expotentialfunktion e^x streng monoton Wachsend, nimmt jedes $y \in \mathbb{R}_+$ als Wert an und ist bijektiv

#Bem:

$y=f(x)=e^x$ ist bijektiv nach S4.4.8 $\underset{ZWS4.4.1\,Bem2.)}{\Rightarrow}$ $\exists$ Umkehrfkt $f^{-1}(y):=x$

Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=f^{-1}(e^x)$ ist im gleichen Sinn wie $f(x)=e^x$ streng monoton, d.h. streng monoton wachsend.

D4.4.4(2544) Logarithmus
Die streng monoton wachsende Umkehrfunktion zu $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ heißt der natürliche Logarithmus und wir schreiben $\log:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $x=\exp(\log x)$.
Bem:

- $y=\log x$ ist per Def äquivalent mit $x=e^y$.
- • Für $a\in\mathbb{R}_+$ & $b\in\mathbb{C}$ setzen wir noch $a^b=e^{b\log a}$. #$(\underbrace{e^{\log a}}_{a})^b= a^b$#
- • • D4.4.4 $\underset{a\in R_+,b\in R}{\Rightarrow}$ $a^b\in\mathbb{R}_+$ & $\log a^b=b*\log a$ $\forall$ $a\in\mathbb{R}_+$, $b\in\mathbb{R}$, beachte aber, dass im Allgemeinen a^b eine komplexe Zahl ist, und deshalb $\log a^b$ nicht definiert ist.

D4.4.5(2563) Gleichmäßige Stetigkeit
Sei $M\subset\mathbb{K}$, $f:M\to\mathbb{K}$ heißt gleichmäßig stetig auf $M:\Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M$: $|z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$
Erläuterung: Egal, welche Punkte $z_1,z_2\in M$ gewählt werden, muß zu ε immer $|z_1-z_2|<\delta_\varepsilon$ gelten, also „ nur 1 Wert δ_ε für ganz M ".
Unterschied zu stetig siehe Bsp 2
Im 2. Bsp immer das gleiche δ_ε, von x_0 unabhängig
Bem: $f:M\to\mathbb{K}$ ist gleichmäßig stetig auf M $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ (δ unabhängig von $z\in M$) mit: $\forall$ $z_0\in M$, $\forall$ $z\in M\cap U_\delta(z_0)$ gilt $f(z)\in U_\varepsilon(z_0)$.

S4.4.10(2564)
Vor: Sei $M\subset\mathbb{K}$ & M kompakt(d.h. abgeschl& beschränkt) $f:M\to\mathbb{K}$ stetig auf M.
Aussage: f ist gleichmäßig stetig auf M.
Bem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig
$f([a,b])=[\min f, \max f]$

S4.4.11(2565) Vor:$M\subset\mathbb{K}$ & M beschränkt, $f:M\to\mathbb{K}$ gleichmäßig stetig auf M.
Beh:f(M) ist beschränkt, d.h. |f| ist auf M beschränkt

Zusatz: f läßt sich eindeutig stetig und gleichmäßig stetig von M auf $\overline{M}$ (kompakt) fortsetzen. Damit ist f auf M beschränkt.

Andere Formulierung (nur für $\mathbb{R}$)
Vor: Intervall I, $f:I\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf M.
Aussage: Falls I beschränkt ist, ist auch f(I) beschränkt

S4.4.12(2567)

$f:I\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf I $\underset{!}{\Rightarrow}$ f stetig auf I

Bem:(.)Stetigkeit $\underset{\text{nicht}}{\Rightarrow}$ gleichmäßige Stetigkeit
(f(x)=1/x auf (0,1), δ_ε hängt von x_0 ab)

(..)Falls I kompakt und stetig $\underset{S4.4.7}{\Rightarrow}$ f(I) kompakt, also beschränkt

4.5 (2600) **Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen**

siehe auch unter 4.2

D4.5.1 (2600)

Geg sei eine beliebige Menge D, sowie Funktionen $f_n, g_k: D \to \mathbb{K}$ $\forall$ n, k$\in\mathbb{N}$.
Dann nennen wir • (f_n) eine Funktionenfolge auf D
(z.B. $f_n(x)=x^n$ auf $-2<x<3$) und

•• $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ eine Funktionenreihe auf D.

(z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} z^n$ auf $\{z\in\mathbb{C}: -2<|z|<5\}$)

- Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent, falls für jedes $z\in D$ die Folge $(f_n(z))$ konvergent ist. Ist dies der Fall, so heißt $f: D\to\mathbb{K}$, mit $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z\in D$, die Grenzfunktion der Folge.
  (z.B. $f_n(x)=x^n$ punktweise konvergent auf $0\le x\le 1$)

•• Analog heißt die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D punktweise konvergent,

falls $\forall$ $z\in D$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ konvergent ist und die Grenzfunktion f

ist dann durch $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ $\forall$ $z\in D$ gegeben.

(z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ punktweise konvergent auf $\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$)

- Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter gilt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \forall\ z\in D: n\ge N \Rightarrow |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.
  (z.B. $f_n(z):=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, konvergiert gleichmäßig auf $U_r(0)$ $\forall$ $0<r<1$ gegen $f(z)=0$,) und analog heißt

•• die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent,

falls sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls weiter gilt:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \forall\ z\in D: n\ge N \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(z)-f(z)\right|<\varepsilon.$$

($\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ gleichmäßig konvergent auf [0,1] siehe A4.5.3).

Also ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ äquivalent mit der gleichmäßigen Konvergenz der Folge ihrer Partialsummenfolge

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die punktweise Konvergenz, aber nicht umgekehrt.

Andere Formulierung
Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen
Vor: $M\subset\mathbf{R}$ oder $M\subset\mathbf{C}$, $f_n:M\to\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$
Aussage:Die Funktionsfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M gegen $f(z):M\to\mathbf{C}$: $\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)\ \forall\ z\in M$.

S4.5.1(2602)
- Funktionenfolge Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Vor:Sei $M\subset\mathbf{R}$ oder $M\subset\mathbf{C}$, $f_n:M\to\mathbf{C}$ für $n\in\mathbf{N}$ gegeben.
Beh:$(f_n(z)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M (gegen Funktion $f(z):=M\to\mathbf{C}$)
$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall\ z\in M$(d.h. unabhängig von $z\in M$) mit
$|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0(\varepsilon)$

- • Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ist genau dann auf D gleichmäßig konvergent, wenn $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbf{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbf{N}\ \forall\ x\in D{:}m\geq n\geq N$ mit $|\sum_{k=n}^{m} g_k(x)|<\varepsilon$.

Andere Formulierung:
Eine Funktionenreihe konvergiert glm auf I genau dann, wenn
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1=n_{1(\varepsilon)}:|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)|<\varepsilon\ \forall\ n>n_1(\varepsilon)\ \forall\ p>1$ und $x\in I$

S4.5.2(2604) Majorantenkriterium von Weierstrass

Vor:$M\subset\mathbf{R}$ oder $M\subset\mathbf{C}$, $f_n:M\to\mathbf{C}$ für $n\in\mathbf{N}$, $|f_n(z)|\leq a_n\ \#(\in\mathbf{R}_+)\#\ \forall\ n\in\mathbf{N}\ \forall\ z\in M\ \&\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.

Aussage: $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ & $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sind gleichmäßig auf M konvergent.

S4.5.3 (2604)Vor: • • (f_n): $f_n\in C(I)\ \forall\ n\in\mathbf{N}$,
• f_n gleichmäßig konvergent auf I gegen $f{:}\ I\to\mathbf{R}$
Aussage: $f\in C(I)$

L4.5.1 Vor: Folge (f_n), $f_n{:}\ [a,b]\to\mathbf{R}$, $f_n\in C([a,b])\ \forall\ n\in\mathbf{N}$. (C...stetige f)
Aussage: (f_n),gleichmäßig konv auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$
$\forall$ konvergenten Folgen $(x_n)\in[a,b]\ \exists\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$

S4.5.4 (2609)

Vor: Sei $M \subset \mathbb{R}$ M kompakt, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f_n: M \to \mathbb{R}$ stetig auf M,

$\forall\, z \in M$ sei $f_n(z) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(z)$, $f: M \to \mathbb{R}$ stetig auf M

Beh: $f_n(z) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(z)$ gleichmäßig konvergent auf M