A0.2.1 Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf X

a) Zeige: $\forall\ x \in X$ ist die Menge $B(x) := \{y \in X \mid$ es gilt nicht $y \sim x\}$ keine Äquivalenzklasse von ~

b) Zeige: Wenn ~ nur 2 Äquivalenzklassen hat so ist B(x) eine Äquivalenzklasse

c) Zeige: Wenn es ein $x \in X$ gibt, sodass B(x) eine Äquivalenzklasse ist, so hat ~nur 2 Äquivalenzklssen.

d) Zeige: Die Aussage, $\forall\ x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt auch nicht $x_1 \sim x_3$ ist falsch

e) Zeige: Die Aussage, $\forall\ x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt jedenfalls $x_1 \sim x_3$ ist ebenfalls falsch.

A0.2.2 Definiere auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eine Relation R durch $(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$. Entscheide, ob es sich hierbei um eine ÄR handelt und bestimme ggf die ÄK.

Lös: $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$, z.z.: $\overset{R}{\sim}$ definiert eine ÄR

#Die „Rechenvorschrift ist eine Beziehung zwischen Paaren (u,v))#

Reflexivität: Es sei $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \Rightarrow xy = xy$, $(x,y) \overset{R}{\sim} (x,y)$

$\#(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_1 y_1$

Symmetrie: Es gelte $(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2)$, d.h. $x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow$

$(x_2, y_2) \overset{R}{\sim} (x_1, y_1)\ \# \Leftrightarrow x_2 y_1 = x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow$

Transitivität: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit

$(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \overset{R}{\sim} (x_3,\ x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow y_3) \Rightarrow$

$x_1 y_2 = x_2 y_1$ und $x_2 y_3 = x_3 y_2$.

Z.z: $x_1 y_3 = x_3 y_1$. Es gilt $x_1 y_3 = \frac{x_2 y_1}{y_2} y_3 = x_2 \frac{y_1 y_3}{y_2} = \frac{x_3 y_2}{y_3} \frac{y_1 y_3}{y_2} = x_3 y_1$

ÄK: $(x_0, y_0)\big|_R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x_0 y = x y_0\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x/y = x_0/y_0\}$

A0.2.3

a) Es sei M eine beliebige Menge $\neq \emptyset$. Die Relation ~ auf MxM sei wie folgt definiert: $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_2 = y_2$

Zeige, dass ~ eine ÄR (auf M) ist und bestimme alle ÄK

Bew: ~ ist reflexiv: $x_2 = x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in M \times M$

~ ist symmetrisch: Sei $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow y_2 = x_2 \Rightarrow$

$(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2) \Rightarrow \forall\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M$

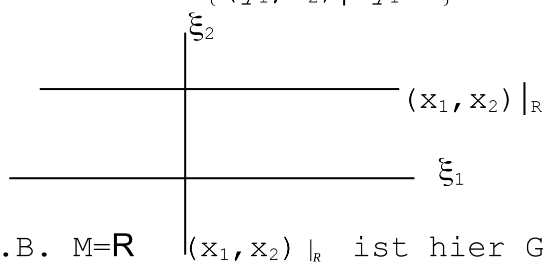
~ ist transitiv: Seien $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$

$x_2 = y_2 \wedge y_2 = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 \Rightarrow$

$(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)\ \forall\ (x_1, x_2), (y_1, y_2) (z_1, z_2) \in M \times M$

ÄK: $(x_1, x_2)\big|_R = \{(y_1, y_2) \in M \times M \mid (y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)\} = \{(y_1, y_2) \in M \times M \mid y_2 = x_2\} =$

$\{(y_1, x_2) \mid y_1 \in M\}$



z.B. $M = \mathbb{R}$ $(x_1, x_2)\big|_R$ ist hier Gerade durch $0, x_2$ parallel zur x_1 Achse.

Bem: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \bigcup_{x_n \in R} (x_1, x_2)\big|_R$ disjunkte Vereinigung

(Partition von $\mathbb{R}^2$, vgl S0.2.1) $x_2 = y_2$ und $y_2 = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 \Rightarrow$

b) ● Auf $\mathbb{R}$ gilt
$x\sim y$ genau dann, wenn $xy\geq 0$,
Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?
Lös:
$x\sim y$ symmetrisch, da $xy=yx$; reflexiv, da $x*x\geq 0$,
nicht transitiv, da $1\sim 0$ wegen $1*0=0$, $0\sim -1$ wegen $0*(-1)=0$ aber $1\not\sim -1$ wegen $1*(-1)<0$
Keine Äquivalenzrelation

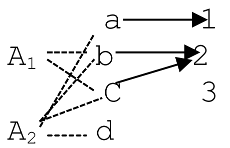
●● Auf $\mathbb{R}$ gilt
$x\sim y$ genau dann, wenn $x-y\ x\in\mathbb{Z}$.
Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?

Lös: $x\sim y$ reflexiv da $\forall\ x\in\mathbb{R}$: $x \overset{\sim}{=} x$ wegen $x-x=0\in\mathbb{Z}$;
$x\sim y$ symmetrisch, da $z=x-y \underbrace{\in}_{x\overset{\sim}{=}y} \mathbb{Z} \Rightarrow -z=y-x \underbrace{\in}_{x\overset{\sim}{=}y} \mathbb{Z}$;

$x\sim y$ transtiv, da $x\sim y$ & $y\sim z\ \in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$ & $y-z\in\mathbb{Z} \Rightarrow$
$x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\sim z$

$x \overset{\sim}{=} y$ ist Äquivalenzrelation
$2\,|_{R} := \{y\in\mathbb{R} \mid y\sim 2\}=\{y\in\mathbb{R} \mid (2,y)\in R\}=\{y\in\mathbb{R} \mid (2-y)\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}\,|_{R} := \mathbb{Z}$, Partition $P=\bigcup_{x\in R}\{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\}=\bigcup_{x\in[0,1]}\{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$

A0.2.4 Vor: $A\neq\emptyset$, $A_1,A_2\subset X$, Beweise: $A_1\subset A_2 \Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$
Bew: Bsp



$f(A_1)=\{2\}$
$f(A_2)=\{1,2\}$

$\forall\ x\in A_1$ gilt $x\in A_2$
z.z: $\forall\ y\in f(A_1)$ gilt $y\in f(A_2)$
Sei $y\in f(A_1)$, y baf $\Rightarrow$
$\exists\ x\in A_1: f(x)=y \underbrace{\Rightarrow}_{Vor} \underbrace{\Rightarrow}_{Vor}$
$\exists\ x\in A_2: f(x)=y \Rightarrow y\in f(A_2)$

A0.2.5 Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. Die Mengen A_1,A_2 seien Teilmengen von A während B_1,B_2 Teilmengen von B seien.
Beweise: $B_1\supset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$
Bew: "$\subset$" von $\Leftrightarrow$ gilt zunächst nur $\Rightarrow$. Sei $x\in f^{-1}(B_1\setminus B_2)$ baf $\Leftrightarrow$
$f(x)\in B_1\setminus B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{B_2\subset B_1} f(x)\in B_1$ und $f(x)\notin B_2 \Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)$ und $x\notin f^{-1}(B_2)$
$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$
" $\supset$" siehe oben Teil $\Leftarrow$ von $\Leftrightarrow$

A0.2.6 Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und f: $X\to Y$ eine Abbildung.
Zeige für $A\subset X$, $B\subset Y$: $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$ $f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$

a) $f^{-1}(Y\setminus B) = X\setminus f^{-1}(B)$
Bew: $x\in f^{-1}(Y\setminus B) \underset{\text{Def Urbild}}{\Leftrightarrow} f(x)\in Y\setminus B$ und $x\in X \Leftrightarrow f(x)\notin B$ und $x\in X$ und $f(x)\in Y$
$\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)$ und $x\in X \Leftrightarrow x\in X\setminus f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(f(A))\supset A$
//D0.2.3 3.)(105) f: $X\to Y$:d) $f(A):=\{f(x) \mid x\in A\}$ Bild der Teilmenge $A\subset X$//
//unter f. ($=\{y\in Y \mid \exists\ x\in A: y=f(x)\}$), $(x,y)\in f$.//
//e) $f^{-1}(B):= \{x\in X \mid f(x)\in B\}$//

Bew:Sei $x\in A$ beliebig $\underset{D=0.2.3\ 3.)}{\Rightarrow}$ $f(x)\in \underbrace{f(A)}_{\tilde{B}}$ $\Leftrightarrow$ $x\in f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(f(A))$ $\tilde{B}$

c) $f(f^{-1}(B))\subset B$

Bew:Sei $y\in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\tilde{A}})$ $\underset{D=0.2.3\ 3.)}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\underbrace{x\in\tilde{A}=f^{-1}(B)}_{d.h.\ y=f(x)\in B}$ mit $f(x)=y$ $\Leftrightarrow$ $y=f(x)\in B$

A0.2.7 Sei $f:X\to Y$ eine Funktion und $A,B\subset X$ und $C,D\subset Y$. Zeige:

a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ und finde ein Beispiel mit $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$
c) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$
d) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

A0.2.8 $X\neq\emptyset$, $A,B\subset X$, $f(X)\to Y$ Abbildung

a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$

Bew: $y\in f(A)\setminus f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)$ & $y\notin f(B)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ $x\in A$: $y=f(x)$ & $f(\tilde{x})\neq y$ $\forall$ $\tilde{x}\in B$ $\Rightarrow$ $\exists$ $x\in A\setminus B$: $y=f(x))$

$\Leftrightarrow$ $y=f(A\setminus B)$ $\Leftrightarrow$ $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$

b) Bedingung für $f(A)\setminus f(B)= f(A\setminus B)$?

Lös: nach a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$, gesucht Bedingung für $f(A)\setminus f(B)\supset f(A\setminus B)$

$x\in A\setminus B$ $\Rightarrow$ $x\in A$, $y=f(A\setminus B)=f(x)$, $\tilde{x}\in B$, $x\neq\tilde{x}$

Fall $y=f(x)$ $\underset{f\ surjektiv}{=}$ $f(\tilde{x})\in f(B)$ $\Rightarrow$ $y\notin f(A)\setminus f(B)$ $\Rightarrow$ $\cancel{f}(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$

Fall $y=f(x)$ $\underset{f\ injektiv}{\neq}$ $f(\tilde{x})\in f(B)$ $\Rightarrow$ $y\in f(A)\setminus f(B)$ $\Rightarrow$ $f(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$

$\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow$ $f(A)\setminus f(B)= f(A\setminus B)$