

A0.2.9 Gegeben sei die Funktion $f:\{1,2,3,4,5\}\rightarrow\{1,3,5,7\}$ mit $f(1)=1, f(2)=3, f(3)=7, f(4)=7, f(5)=5$.

Bestimme $f(\{1,2,3\}), f^{-1}(\{3\}), f^{-1}(\{5\}), f^{-1}(\{5,7\})$

Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Ist $f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lös: $f(\{1,2,3\})=\{f(1), f(2), f(3)\}=\{1,3,7\},$

$f^{-1}(\{3\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\} \mid f(x)=3\}=\{2\},$

$f^{-1}(\{5\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\} \mid f(x)=5\}=\{5\}$

$f^{-1}(\{5,7\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\} \mid f(x)\in\{5,7\}\}=\{5,3,4\}$

f injektiv? $\exists x_1, x_2 \in \{1,2,3,4,5\}$ mit $x_1 \neq x_2: 3 \neq 4$ mit $f(x_1)=f(x_2):$
 $f(3)=7, f(4)=7, f(3)=f(4)=7 \Rightarrow f$ nicht injektiv

f surjektiv? Sei $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{1,3,5,7\}$

$\forall y \in Y=\{1,3,5,7\} \exists$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x)=y:$

$f(1)=1, f(2)=3, f(3)=7, f(4)=7, f(5)=5$

f ist surjektiv (für $y=7$ existieren sogar 2 Elemente aus X mit $f(x)=y$)

f bijektiv? Nein, da f nicht injektiv ($f(3)=f(4)$).

$f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv? $X'=\{1,2,3\}, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=7,$

$Y=\{1,3,5,7\} \forall x_1, x_2 \in X'$ und $x_1 \neq x_2: f(x_1) \neq f(x_2)$ Ja!

$f_{|\{1,2,3\}}$ surjektiv? $Y=f(X'), f(x) \neq 5$ für $x \in \{1,2,3\}$ Nein!

$f_{|\{1,2,3\}}$ bijektiv? $f_{|\{1,2,3\}}$ ist injektiv und nicht surjektiv \Rightarrow Nein!

A0.2.10 Gebe an/zeige: Eine Abbildung f von X nach Y ist genau dann injektiv/nicht injektiv, wenn gilt:

a) $x, x' \in X$ und $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$

Lös: injektiv

b) Gibt es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x)=y$ so ist f injektiv

c) Gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $f(x)=y$, so ist f trotzdem nicht injektiv.

d) Wenn für $x, x' \in X$ mit $f(x)=f(x'), x \neq x'$ ist, so ist f nicht injektiv

e) Gibt es eine surjektive $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$?

Lös: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ja}$

A0.2.11 Welche der folgenden Abbildungen von \mathbb{R} in sich sind injektiv, welche sind surjektiv?

$f(x)=x^3, f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), $f(x)=|x|, f(x)=e^x$.

A0.2.12 Gegeben sei eine Menge $M \neq \emptyset$ und deren Potenzmenge $\mathbf{P}(M)$.

a) Bestimme eine injektive Abbildung $f:M \rightarrow \mathbf{P}(M)$.

Lös: Bsp $f:M \rightarrow \mathbf{P}(M). f(x)=\{x\}$. Dann ist f injektiv, denn aus $f(x_1)=f(x_2)$ folgt $\{x_1\}=\{x_2\} \Rightarrow x_1=x_2$

b) Beweise, dass es keine surjektive Abbildung $g: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ geben kann.
Hinweis: Betrachte die Menge $A = \{x \in M \mid x \neq g(x)\}$

Bew: Annahme: Es existiert eine solche Abb $g: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ surjektiv.

Sei $A = \{x \in M \mid x \neq g(x)\}$. Da g surjektiv $\exists x_0 \in M$ mit $g(x_0) \in A$,
#d.h. $x_0 \neq g(x_0)$ # da $\mathcal{P}(M)$ außer allen $x \in M$ noch weitere Elemente
enthält und diese wegen Surjektivität einen Partner in M haben
müssen. Dann ist $x_0 \in A$ oder $x_0 \notin A$.

Wenn $x_0 \in A$, dann heißt das $x_0 \neq g(x_0) \in A$.

Wenn $x_0 \notin A$, dann heißt das $x_0 = g(x_0) \in A \Rightarrow$ Widerspruch

Annahme einer surjektiven Funktion $g: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ muss also falsch
gewesen sein. (...auch für ∞ große $\mathcal{P}(M)$ richtig)

A0.2.13 Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv, $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv

b) g injektiv, $g \circ f$ surjektiv \Rightarrow surjektiv

c) Aus $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

d) Aus $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

e) Sind f und g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

Bew: $g: X \rightarrow Y, f: Y \rightarrow Z, x, x' \in X, f \circ g(x) = f \circ g(x')$; Zu zeigen $x = x'$

$$f(\underbrace{g(x)}_y) = f \circ g(x) \stackrel{g \text{ injektiv}}{=} f \circ g(x') = f(\underbrace{g(x')}_{y'}) \Rightarrow f(y) = f(y') \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} y = y' \Rightarrow$$

$$g(x) = g(x') \stackrel{g \text{ injektiv}}{=} x = x'$$

f) Sind f und g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

Bew: $z \in Z. \exists y \in Y: f(y) = z$. Da g surjektiv $\exists x \in X: g(x) \stackrel{g \text{ surjektiv}}{=} y \stackrel{f \text{ surjektiv}}{\Rightarrow} z$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(y) = z \Rightarrow f \circ g$ surjektiv

g) Folgere aus c) und d): f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv und
zeige, dass dann $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

A0.2.14 Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$

Lös: " \Leftarrow " $y = \text{id}_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(\underbrace{g(y)}_x) = f(x) \Rightarrow$ d.h. alle Elemente von Y
werden von y erreicht, f ist surjektiv
 \Rightarrow "definiere $g: Y \rightarrow X, g(y) = x$ (wobei $f(x) = y$) d.h. zu jedem y
finde ich mindestens ein x da surjektiv.
 $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = \text{id}_Y$

A0.2.15 Geg sei eine nichtleere Menge X und 2 Funktionen

$f, g: X \rightarrow X$. Beweise oder widerlege: Es gilt stets $f \circ g = g \circ f$

Lös: #Wertebereich muss nicht gleich X sein

$f \circ g \neq g \circ f$: Setze z.B.: $X = \{0, 1\}$ und definiere

$f: X \rightarrow X$ durch $f(0) = f(1) = 0$ und $g: X \rightarrow X$ durch $g(0) = g(1) = 1 \Rightarrow$

$f(g(0)) = f(g(1)) = f(1) = 0$ und $g(f(0)) = g(f(1)) = g(0) = 1 \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

A0.2.16

a) Es sei eine Funktion $f: A \rightarrow B$ gegeben. $A_1 \subset A, B_1 \subset B$.

Beweise: $f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$

Lös: Sei $x \in A_1$. Def $y = f(x)$ und $B_1 = f(A_1) \Rightarrow y \in B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_1) = \{z \in A \mid f(z) \in B_1\}$
 $\Rightarrow x$ erfüllt die Bedingung $f(z) \in B_1$, denn $f(x) = y \in B_1 \Rightarrow$

$x \in f^{-1}(B_1) = f^{-1}(f(A_1))$

$f^{-1}(f(A)) = A$ gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel siehe b)

#Lös: $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Sei $x \in A_1$ baf $\Rightarrow y \in f(A_1)$ mit $f(x) = y \Rightarrow$

$\exists x \in A_1: f^{-1}(y) = x$ oder $(\exists x' \in A \setminus A_1: f^{-1}(y) = x')$ und $\exists x \in A_1: f^{-1}(y) = x$
 $\Rightarrow x \in A_1$ und $x \in f^{-1}(f(A_1)) \Rightarrow A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

b) Es seien X, Y Mengen $\neq \emptyset$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Zeige für $A \subset X, B \subset Y: f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$f(f^{-1}(B)) = B$ gilt im allgemeinen nicht. Gegenbeispiel

Bew: Sei $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2\}$, mit $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ und $f: X \rightarrow Y$ definiert durch $f(x_1) = f(x_2) = y_1$ (d.h. $f(X) = y_1$).

Gegenbeispiel:

Weiter sei $A = \{x_1\}$ und $B = Y = \{y_1, y_2\} \Rightarrow$

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y_1\}) = \{x_1, x_2\} = X \neq A \text{ und } f(f^{-1}(B)) = f(\underbrace{\{x_1, x_2\}}_{=X}) = \{y_1\} \neq B$$

Bem: (.) $f^{-1}(f(A)) = A \quad \forall A \subset X \Leftrightarrow f$ injektiv

(..) $f(f^{-1}(B)) = B \quad \forall B \subset Y \Leftrightarrow f$ surjektiv

c) f ist injektiv $\Leftrightarrow f(\bigcup_{M \in S} M) = \bigcup_{M \in S} f(M) \quad \forall S \subset \mathcal{P}(X), S \neq \emptyset$

// D0.2.6 Bem: 2.) (203) $f: X \rightarrow Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \quad \forall A, B \subset X$ //

// (107) Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f //

// b) $f(\bigcup_{M \in S} M) \subset \bigcap_{M \in S} f(M), M \subset X$ //

Bew: " \Leftarrow " folgt aus D0.2.6 Bem 2 mit $S = \{A, B\}$ für beliebige $A, B \subset X$

$$(f(A) \cap f(B) = \bigcap_{M \in S} f(M) = f(\bigcup_{M \in S} M) = f(A \cap B))$$

" \Rightarrow " Sei f injektiv. Sei $S \subset \mathcal{P}(X), S \neq \emptyset$ bel.

$f(\bigcup_{M \in S} M) \subset \bigcup_{M \in S} f(M)$. Noch z.z. $f(\bigcup_{M \in S} M) \supset \bigcup_{M \in S} f(M)$ wie

folgt

$$y \in \bigcup_{M \in S} f(M) \stackrel{\text{Def Bild}}{\Leftrightarrow} y \in f(M) \quad \forall M \in S \quad (\text{besser: } \forall M \in S: y \in f(M)) \stackrel{\text{Def Bild}}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall M \in S \exists x_M \in M \text{ mit } y = f(x_M) \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Leftrightarrow}$$

$\forall M \in S \exists x \in M$ mit $y = f(x)$ und zwar dasselbe $x \quad \forall M \in S$

" \Leftarrow " klar

$$" \Rightarrow " f(x_{M_1}) = f(x_{M_2}) \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Leftrightarrow} x_{M_1} = x_{M_2}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{M \in S} M \text{ mit } y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(\bigcup_{M \in S} M)$$

Bem: Es wurde sogar $\bigcup_{M \in S} f(M) = f(\bigcup_{M \in S} M)$ bewiesen

A0.2.17 $f: X \rightarrow Y$. Zeige daß immer gilt $f \circ \text{id}_X = f$ und $\text{id}_Y \circ f = f$

A0.2.18 $f: X \rightarrow Y$ bij und f^{-1} die Umkehrfkt.

Zeige $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y, f^{-1} \circ f = \text{id}_X$

A0.2.19 Sei angenommen, daß eine Funktion $g: Y \rightarrow X$ existiert, sodaß $f \circ g = \text{id}_Y, g \circ f = \text{id}_X$. Zeige, daß dann f bijektiv und $g = f^{-1}$ ist.

Was kann man schließen, wenn nur $f \circ g = \text{id}_Y$ oder $g \circ f = \text{id}_X$ gilt?

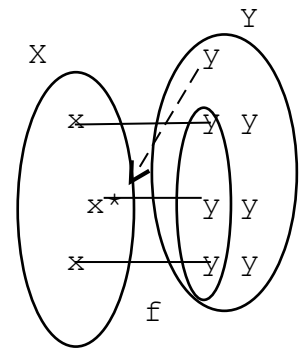
A0.2.20

Es seien X, Y Mengen $\neq \emptyset$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige:

a) f ist genau dann injektiv, falls es eine Abbildung

$g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ gibt

Bew: „ \Rightarrow “ Sei f injektiv $\Rightarrow \forall y \in f(X) \exists$ genau ein $x_y \in X: f(x_y) = y$



wähle außerdem noch ein $x^* \in X$ fest
(möglich, da $X \neq \emptyset$) Def $g: Y \rightarrow X$,

$$g(y) = \begin{cases} x_y, & \text{falls } y = f(x) \\ x^*, & \text{falls } y \notin f(X) \text{ d.h. } y \in Y \setminus f(X) \end{cases}$$

Sei $x \in X$ beliebig $\Rightarrow (g \circ f)(x) = g \circ \underbrace{f(x)}_{=y \in f(X)} = x$, da

$f(x) = y$, d.h. $x_y = x$ (beachte: x_y ist

eindeutig) $\stackrel{\text{„}\forall \text{ bel“}}{\Rightarrow} g(y) = x$ da $f(x) = y \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$g \circ f = \text{id}_X$.. beachte Def und Wertebereich von

$g \circ f$ und id_X sind gleich

„ \Leftarrow “: $\exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ d.h. Z.z.: f injektiv,

d.h.z.z. $\forall x_1, x_2$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$
 $x_1 = x_2$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{id}_X(x_1) \stackrel{\text{„}\forall \text{ Vor“}}{=} (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) \stackrel{\text{„}\forall \text{ Vor“}}{=} \\ &\text{id}_X(x_2) = x_2 \end{aligned}$$

Sei $x \in X$ bel, $\Rightarrow g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=y \in f(X)}) = x$, da $f(x) = y$, d.h. $x_y = x$

(beachte das x_y ist eindeutig) $\stackrel{\text{„}\forall \text{ bel“}}{\Rightarrow} g \circ f = \text{id}_X$

(Beachte: Definitionsbereich und Wertemenge/Zielmenge der beiden Funktionen sind gleich).

b) f ist genau dann surjektiv, falls es eine Abbildung $h:$

$Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ gibt.

Beh: f surjektiv $\Leftrightarrow \exists h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ (h heißt Rechtsinverses)

Bew: Skizze siehe bei Def für Surjektion

„ \Rightarrow “ Sei f surjektiv $\Rightarrow \forall y \in Y \exists x_y \in X: f(x_y) = y$. Dies ist möglich, da f surjektiv. Sei ein x_y fixiert (es gibt

viele). Sei $h: Y \rightarrow X$, $h(y) := x_y \Rightarrow (f \circ h)(y) = f(x_y) = y \Rightarrow f \circ h = \text{id}_Y$

„ \Leftarrow “ $\exists h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$

Z.z.: f surjektiv, d.h. $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$.

Definiere $h(y) = x_y$. Sei $y \in Y$ beliebig,

Setze $x := h(y) \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x_y) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = \text{id}_Y(y) = y \Rightarrow f \circ h = \text{id}_Y$

Beachte: Def und Wertebereich von f, h und id_Y sind gleich) d.h.

$$\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$$

c) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ gibt. Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Beh(.) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ $f \circ g = \text{id}_Y$

(..) dieses g ist eindeutig

($g = f^{-1}$ siehe später, heißt inverse Funktion)

Bew(.) : " \Rightarrow " 1. Möglichkeit: Wähle $g = f^{-1}: Y \rightarrow X \Rightarrow$

$$g \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

2. Möglichkeit: Da f injektiv und surjektiv ist,

$\exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ (nach a)) und

$\exists h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ (nach b)). Genügt z.z. $h = g$.

Dies gilt, da $h = \text{id}_X \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \text{id}_Y = g$

" \Leftarrow " klar nach a), b). $\exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und

$f \circ g = \text{id}_Y$... surjektiv + injektiv ... bijektiv

Bew(..) Eindeutigkeit von g :

Sei $\tilde{g}: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \tilde{g} \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = f \circ \tilde{g} = \text{id}_Y$

Z.z: $\tilde{g} = g$

$$\text{Bew: } \tilde{g} = \text{id}_X \circ \tilde{g} = (g \circ f) \circ \tilde{g} = g \circ (f \circ \tilde{g}) = g \circ \text{id}_Y = g$$

A0.2.21 Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge von Mengen. Die Relation \sim auf M sei wie folgt definiert:

$M_1 \sim M_2$: \Leftrightarrow es existiert eine bijektive Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$

Zeige, daß \sim eine ÄR auf M ist

// D0.2.6 (203) Bem: 3.) $f: X \rightarrow Y$ bijektiv $g: Y \rightarrow Z$ bijektiv //

// $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ //

Bew:(.) \sim ist reflexiv, d.h. $M \sim M \quad \forall M \in M$, denn $\text{id}_M: M \rightarrow M$ ist bijektiv.

(..) \sim ist symmetrisch, $\forall M_1, M_2 \in M. M_1 \sim M_2 \Rightarrow M_2 \sim M_1$

Bew: Sei $M_1 \sim M_2 \xrightarrow[\text{Def } \sim]{\Leftrightarrow} \exists \text{ bij } f: M_1 \rightarrow M_2 \Rightarrow f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1 \text{ bijektiv} \xrightarrow[\text{Def } \sim]{\Leftrightarrow} M_2 \sim M_1$

(...) \sim ist transitiv, d.h. $\forall M_1, M_2, M_3 \in M: M_1 \sim M_2 \sim M_3 \Rightarrow M_1 \sim M_3$,

Bew: Sei $M_1 \sim M_2$ und $M_2 \sim M_3 \Rightarrow \exists$ bijektive $f: M_1 \rightarrow M_2$, $g: M_2 \rightarrow M_3$

$$\xRightarrow[\text{Bem 3}]{\Leftrightarrow} g \circ f: M_1 \rightarrow M_3 \text{ bijektiv} \Rightarrow M_1 \sim M_3$$