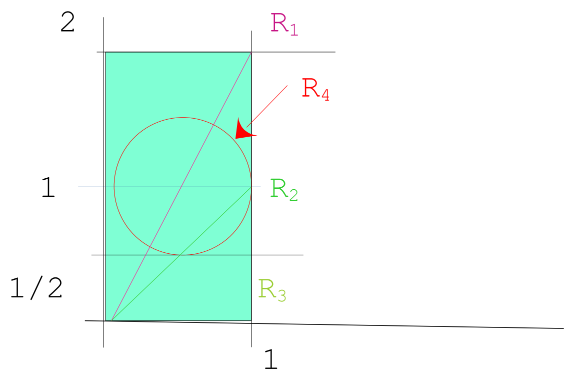
0.2 (100) **Relationen, Funktionen**

D0.2.1 (100) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Jede Teilmenge $R\subset X\times Y$ heißt eine Relation der Menge X zur Menge Y

Bez: $x \overset{R}{\sim} y$ oder $xRy :\Leftrightarrow (x,y)\in R$, x steht in Relation zu y
Falls X=Y heißt $R\subset X\times X=X^2$ Relation in oder auf X

Bsp: $X=[0,1]$, $Y=[0,2]$



$$x \overset{R_1}{\sim} y \Leftrightarrow \underbrace{y}_{\in Y} = 2\underbrace{x}_{\in X} \quad (0\le x\le 1)$$

$$x \overset{R_2}{\sim} y \Leftrightarrow \underbrace{y}_{\in Y} = \underbrace{x}_{\in X}$$

$$x \overset{R_3}{\sim} y \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\in X} \in[0,1],\ \underbrace{y}_{\in Y} \in[0,2]$$

$R_3=X\times Y$ (Rechteck)

$$x \overset{R_4}{\sim} y \Leftrightarrow (x-0{,}5)^2+(y-1)^2=(1/4)^2,\ x\in[0,1],\ y\in[1/2,3/2]$$

$R_1=\{(x,y)\mid \underbrace{x}_{\in X},\ \underbrace{y}_{\in Y}=2\underbrace{x}_{\in X}\}\subset X\times Y$

#siehe auch A1.1.9. Verständlich, wenn „Schulrechenregeln" vorerst
#schon jetzt als bewiesen genommen werden. Die Beweise erfolgen
#allerdings erst nach 0.2, aber vor A1.1.9

D0.2.2 (100)

1.) Eine Relation R auf X (d.h. $R\subset X\times X$) heißt,

reflexiv: $\Leftrightarrow \forall\, x\in X$ gilt xRx (d.h. $(x,x)\in R$) *D0.2.3 (105)*

symmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\, x,y\in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y \Rightarrow y \overset{R}{\sim} x$
(d.h. $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$)

antisymmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\, x,y\in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y$ und $y \overset{R}{\sim} x \Rightarrow x=y$
(d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,x)\in R) \Rightarrow x=y)$

transitiv: $\Leftrightarrow \forall\, x,y,z \in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y$ und $y \overset{R}{\sim} z \Rightarrow x \overset{R}{\sim} z$
(d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$)

#Überlegungen: Um $R\subset X\times X$ zu erzeugen, dient eine Vorschrift für die
Beziehung zwischen 2 Elementen von R, die die Zugehörigkeit
dieser beiden Elementen zu R bestimmen.
Bsp: $x \overset{R_5}{\sim} y \Leftrightarrow X=\{x\mid x\in[0,1]\}$, $Y=\{y\mid y\in[0,1]\} \Rightarrow$
$\forall\, x\in X\ \exists\, y\in Y: x=y$, $\forall\, y\in Y\ \exists\, x\in X: y=x \Rightarrow$
$(x,x)\in R_5 \Rightarrow R_5$ reflexiv.

2.) Eine Relation R auf X ($R\subset X\times X$!) heißt Äquivalenzrelation (ÄR): $\Leftrightarrow$
R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

Bsp:
- "=" ist ÄR
- $R_{\le}=\{(x,x'):x\le x'\}$ ist keine ÄR… keine Symmetrie!

- X=**Z** , $x \sim x' \Leftrightarrow x - x'$ ist gerade ist ÄR

  Bew: $x \overset{R}{\sim} x \Leftrightarrow x-x=0 \ \forall\ x \in Z$, 0 ist gerade... reflexiv

  $x-x'$ gerade $\Rightarrow$ (x & x' gerade) oder (x & x' ungerade)$\Rightarrow$

  $x'-x$ gerade …..symmetrisch

  $x-x'$ & $x'-x''$ gerade $\Rightarrow (x-x')+(x'-x'')=x-x''$ gerade $\Rightarrow$ transitiv

  $\Rightarrow$ ÄR

3.)Ist R eine ÄR auf X, so heißt für jedes $x \in X$ die Menge

$x|_R := \{x' \in X \mid x' \overset{R}{\sim} x\} = \{x' \in X \mid (x',x) \in \overset{R}{\sim}\}$

eine Äquivalenzklasse (ÄK) von x bzgl R.

Jedes $x \in x|_R$ heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

Bsp:

1.)$X=[0,1]$, $R_k \subset X \underset{X=Y}{x} X = X^2 = [0,1]x[0,1] = [0,1]^2$ für R_1 bis R_4 !!!!!!!!!!!!!!

$R_1 := \{(x,x^2): 0 \le x \le 1\}$ ist keine ÄR, denn $1/2 \overset{R_1}{\sim} 1/2$ gilt nicht

$R_2 := \{(x,x): 0 \le x \le 1\}$ ist ÄR, $x|_{R_2} = \{x\} \ \forall\ x \in [0,1]$

$R_3 := \{(x,y): 1 \le x,\ y \le 1\}$ ist ÄR, $x|_{R_3} = \{[0,1]\} \ \forall\ x \in [0,1]$

Beachten: $R_3 \subset XxX = [0,1]x[0,1]$

$R_4 := \{(x,y): y=x$ oder $y=1-x\}$ ist ÄR, $x|_{R_4} = \{x, 1-x\} \cup \{x,x\} \ \forall\ x \in [0,1]$

2.)X=**Z** , $x \overset{R}{\sim} y: \exists\ t \in \mathbf{Z}$ und $x=3t+y$ bzw $y=x-3t$

(.)$x \overset{R}{\sim} x$: $x=3t+x(=y) \Leftrightarrow t=0$ Reflexiv ok

(..)$x \overset{R}{\sim} y \overset{?}{\Rightarrow} y \overset{R}{\sim} x$…. Antwort nächste Zeile

$x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x=3t+y \Leftrightarrow y=-3t+x=3 \underbrace{\tilde{t}}_{(=-t)\in Z} +x$ symmetrisch ok

(...)$x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x=3t_1+y$, $y \overset{R}{\sim} z \Leftrightarrow y=3t_2+z$. Wir wollen $x=3t_3+z$.

$x=3t_1+y=3t_1+3t_2+z=\underbrace{3(t_1+t_2)}_{=3t_3 \in Z}+z$ transitiv ok

ÄK: $0|_R = \{y \in X \mid y \overset{R}{\sim} 0$, d.h. $y=0-3t, t \in \mathbf{Z}\} = \{0,3,-3,6,-6,…\}$

$1|_R = \{y \in X \mid y=1-3t, t \in \mathbf{Z}\} = \{1,-2,-5,-8….4,7,10……\}$

$2|_R = \{y \in X \mid y=2-3t, t \in \mathbf{Z}\} = \{1,-1,5,-4,8,…\}$

$3|_R = \{y \in X \mid y=3-3t, t \in \mathbf{Z}\} = \{y \in X \mid y=3(1-t), t \in \mathbf{Z}\} = 0|_R$ usw

Partition: $\{0|_R, 1|_R, 2|_R\}$ da $\{0|_R \cap 1|_R \cap 2|_R\} = \emptyset$

3.) X={Geraden einer Ebene}, $a \overset{R}{\sim} b \Leftrightarrow a$ parallel zu b

(.)reflexiv a parallel zu a

(..)$a \overset{R}{\sim} b \Rightarrow b \overset{R}{\sim} a$ symmetrisch

(...)$a \overset{R}{\sim} b \Rightarrow b \overset{R}{\sim} c \Rightarrow a \overset{R}{\sim} c$ transitiv

ÄK: unendlich viele ÄK, alle parallen Geraden

4.)X={1,2}, R={(1,1),(2,2),(1,2)} d.h. $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \text{ oder} \\ x=1, y=2 \end{cases}$

$(x,x) \in R \ \forall\ x \in X$ ... reflexiv

$(1,2) \in R$, $(2,1) \notin R$....nicht symmetrisch, keine ÄR

5.)Bsp für transitiv:<...x<y, y<z $\Rightarrow$ x<z

6.)Auf **N** gilt $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x-y$ gerade, $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x+y$ gerade sind Äquivalenzrelationen, jedoch

- $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x,(y$ gerade) (z.B. $1,1 \notin R$ da zu x=1 nur 2,4,6,… gehört, d.h. keine Refelexivität) und

- $x \sim y \Leftrightarrow x-y$ ungerade, $x \sim y \Leftrightarrow x+y$ ungerade
  sind keine Äquivalenzrelationen.
- $X=\mathbb{Z}$, $k,n \in \mathbb{Z}$, $k \overset{R}{\sim} n \Leftrightarrow k-n$ gerade
  (unter anderem k-0=k gerade, 2k+1-1 gerade)

  $0|_R = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \sim 0\} \underbrace{=}_{k-n\,gerade} \{\text{gerade Zahlen}\} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\} = 2*\mathbb{Z}$

  $1|_R = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \sim 1\} \underbrace{=}_{(2Z+1)-1\,gerade} \{\text{ungerade Zahlen}\} = 2*\mathbb{Z}+1$

  $\mathbb{Z} = 0|_R \cup 1|_R$ mit $0|_R \cap 1|_R = \emptyset$

7.) $X=\mathbb{Q}$; $r,s \in \mathbb{Q}$, $r \overset{R}{\sim} s \Leftrightarrow r-s$ gerade ganze Zahl

//3.)Ist R eine ÄR auf X, so heißt für jedes x∈X die Menge

// $x|_R := \{x' \in X \mid x' \sim x\} = \{x' \in X \mid (x',x) \in \overset{R}{\sim}\}$

// eine Äquivalenzklasse (ÄK) von x bzgl R.

// Jedes $x \in x|_R$ heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

$r \in \mathbb{Q}$, $\{r \in \mathbb{Q} \mid r-s \in \{2\mathbb{Z}\}\}$

Bsp: s=15,67, r=1,67; r-s=-14

s=-15,67, r=0,33; r-s=16

$\Rightarrow r|_R = 0 \le r < 2 \ldots$ unendlich viele ÄK

A0.2.1 Sei $\overset{ÄR}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf X

Lösungsansätze sind nur erste Versuche...evt falsche Versuche

a) Zeige: $\forall x \in X$ ist die Menge $B(x) := \{y \in X \mid \text{es gilt nicht } y \overset{R}{\sim} x\}$ ist keine Äquivalenzklasse

//**D0.2.2** (100)

//1.)Eine Relation R auf X (d.h. $R \subset X \times X$) heißt,

// reflexiv: $\Leftrightarrow \forall x \in X$ gilt $x \overset{R}{\sim} x$ (d.h. $(x,x) \in R$) *D0.2.3 (105)*

// symmetrisch: $\Leftrightarrow \forall x,y \in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y \Rightarrow y \overset{R}{\sim} x$

// antisymmetrisch: $\Leftrightarrow \forall x,y \in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y$ und $y \overset{R}{\sim} x \Rightarrow x=y$

// (d.h. $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R) \Rightarrow x=y$)

// transitiv: $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y$ und $y \overset{R}{\sim} z \Rightarrow x \overset{R}{\sim} z$

// (d.h. $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$)

//3.)Ist R eine ÄR auf X, so heißt für jedes x∈X die Menge

// $x|_R := \{x' \in X \mid x' \overset{R}{\sim} x\} = \{x' \in X \mid (x',x) \in \overset{R}{\sim}\}$

// eine Äquivalenzklasse (ÄK) von x bzgl R.

// Jedes $x \in x|_R$ heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

#Lös: $B(x) := \{y \in X \mid \text{es gilt nicht } y \overset{R}{\sim} x\} \Rightarrow \{y \in X \mid (y,x) \notin \overset{R}{\sim}\}$

Sei $\{z \in X \mid (z,x) \notin \overset{R}{\sim}\} \wedge \{y \in X \mid (y,x) \notin \overset{R}{\sim}\} \Rightarrow z,y \in B(x)$

b) Zeige: Wenn $\overset{R}{\sim}$ nur 2 Äquivalenzklassen hat so ist B(x) eine Äquivalenzklasse

#Lös: $x|_R := \{x' \in X \mid (x',x) \in \overset{R}{\sim}\} \wedge y|_R := \{y' \in X \mid (y',y) \in \overset{R}{\sim}\}$

Annahme: Es gelte $y \overset{R}{\sim} x \Rightarrow (y,x) \in \overset{R}{\sim} \Rightarrow ((y,x) \in \overset{R}{\sim} \wedge (x,x') \in \overset{R}{\sim} \Rightarrow (y,x') \in \overset{R}{\sim}$

x=y

$B(x):=\{y\in X \mid \text{es gilt nicht } y \overset{R}{\sim} x\}$

c) Zeige: Wenn es ein $x\in X$ gibt, sodass $B(x)$ eine Äquivalenzklasse ist, so hat $\overset{R}{\sim}$ nur 2 Äquivalenzklassen.

d) Zeige: Die Aussage, $\forall\ x_1,x_2,x_3\in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \overset{R}{\sim} x_2$ noch $x_2 \overset{R}{\sim} x_3$ gilt, so gilt auch nicht $x_1 \overset{R}{\sim} x_3$ ist falsch

e) Zeige: Die Aussage, $\forall\ x_1,x_2,x_3\in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim \overset{R}{\sim} x_2$ noch $x_2 \overset{R}{\sim} x_3$ gilt, so gilt jedenfalls $x_1 \overset{R}{\sim} x_3$ ist ebenfalls falsch.

A0.2.2 Definiere auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ eine Relation R durch

$(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1.$

Entscheide, ob es sich hierbei um eine ÄR handelt und bestimme ggf die ÄK.

Lös: $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$, $y_1,y_2\in\mathbb{N}$, z.z.: $\overset{R}{\sim}$ definiert eine ÄR $\overset{ÄR}{\sim}$

Reflexivität : Es sei $(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \Rightarrow xy=xy$, $(x,y) \overset{R}{\sim} (x,y) \Rightarrow$ ok, Regel ok

Auch für $(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_1,y_1)$ muss Vorschrift

$(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$ gelten, d.h. sie gilt:

$(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_1y_1=x_1y_1$ ...Indices nicht mehr

erforderlich

Symmetrie : Es gelte $(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1 \Rightarrow$

$(x_2,y_2) \overset{R}{\sim} (x_1,y_1)$ # $\Leftrightarrow x_2y_1=x_1y_2 \Rightarrow x_1y_2=x_2y_1 \Rightarrow$ ok Regel befolgt

Transitivität: Seien $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ mit

$(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2) \overset{R}{\sim} (x_3,y_3) \Rightarrow$

$x_1y_2=x_2y_1 \wedge x_2y_3=x_3y_2.$

Z.z: $(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_3,y_3) \Leftrightarrow x_1y_3=x_3y_1$.

Es gilt $x_1y_3=\dfrac{x_2y_1}{y_2}y_3=x_2\dfrac{y_1y_3}{y_2}=\dfrac{x_3y_2}{y_3}\dfrac{y_1y_3}{y_2}=x_3y_1 \Rightarrow$ Regel ok

$\Rightarrow \overset{R}{\sim}$ ist $\overset{ÄR}{\sim}$

ÄK: $(x_0,y_0)|_R=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \mid x_0y=xy_0\}=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \mid x/y=x_0/y_0\}$

S0.2.1 (103)

Vor: Sei X beliebige Menge $\neq\emptyset$, dann gilt

1.) Ist R eine ÄR in/auf X, so ist die Menge aller ÄK von R eine Partition von X (d.h. X ist die Vereinigung von paarweise disjunkten ÄK$\neq\emptyset$, oder X ist in disjunkte ÄK$\neq\emptyset$ zerlegt: $X=\bigcup_{x\in X}(x|_R))$, sodass 2 Elemente aus X genau dann äquivalent sind, wenn sie in derselben Teilmenge liegen.

Bew: Seien $x, y \in X$. Es gebe ein $z \in x|_R \cap y|_R$.

Zu zeigen $x|_R = y|_R$ durch den Schluss:

liegt ein Element in $y|_R$, dann auch in $x|_R$ und umgekehrt.

Sei $w \in y|_R$ d.h. $y \overset{R}{\sim} w$ & $y \overset{R}{\sim} z \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR kommutativ}} z \overset{R}{\sim} y$ & $y \overset{R}{\sim} w \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR transitiv}} z \overset{R}{\sim} w \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR kommutativ}} w \overset{R}{\sim} z \Rightarrow$

$z \overset{R}{\sim} x \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR transitiv}} w \overset{R}{\sim} x \Rightarrow w \in x|_R$.

Andere Richtung $w \in x|_R .. \Rightarrow .. w \in y|_R$ analog mit vertauschten Buchstaben x und y

Andere Formulierung:

Vor: $\sim$ eine ÄR auf X; $x, y \in X$

Aussage : $x|_R = y|_R$ oder $x|_R \cap y|_R = \emptyset \Leftrightarrow$

X ist die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklasse

2.) Ist $\bigcup_{M \in S} M$ eine Partition von X mit $M \neq \emptyset$ und definiert man eine Relation (zunächst keine ÄR) auf X folgendermaßen:

$xRy \Leftrightarrow \exists\, M \in S$ mit $x, y \in M$, so ist R eine ÄR auf X und $S \subset (\mathcal{P}(X))$ ist genau die Menge aller ÄK bzgl R

Bew: Zu zeigen... $x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow \exists\, M \in S: x, y \in M$???

a) $x \in X \Rightarrow \exists\, M \in S: x \in M \Rightarrow xRx$ (refl)

\# Bem: Nehme ein $x \in X$, dazu reflexive Vorschrift

\# "$\exists\, M \in S: x \in M$" diesem ein Element zuzuordnen.

b) $xRy \Rightarrow \exists\, M \in S: x, y \in M \Rightarrow yRx$ (symm)

\# $M \in$ Partition $\bigcup_{M \in S} M$, $(x,y) \in M'$, $(x,y) \notin M'' \in \bigcup_{M \in S} M$, $((x,y) \wedge (y,x)) \in M'$

c) ?????

$xRy \wedge yRz \Rightarrow$ Annahme.. $\exists\, M_1, M_2 \in S: x, y \in M_1 \quad y, z \in M_2 \Rightarrow$

$y \in M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ (da y drinliegt) $\underbrace{\Rightarrow}_{M_1 \cap M_2 = \varphi \in Partition} M_1 = M_2 \Rightarrow x, z \in M_1 = M_2 \Rightarrow$

xRz (transitiv)

$\underbrace{\Rightarrow}_{a,b,c}$ R ist ÄR

Andere Formulierung:

Durch jede Partition von X wird eine ÄK definiert, wobei $x \overset{R}{\sim} y$, wenn x und y in derselben Teilmenge der Partition liegen.

Bew: Umgekehrt zu 1.) sei S eine Menge von Teilmengen von X mit $\bigcup_{A \in S} A = X$ und $A \cap A' = \emptyset$ für verschiedene Mengen $A, A' \in S$.

Wir definieren eine Relation auf X durch $x \overset{R}{\sim} y$, wenn x und y in einer Menge $A \in S$ liegen. Dann gilt α) Es sei $x \in X \Rightarrow \exists\, A \in S$ mit $x \in A \Rightarrow x \overset{R}{\sim} x$

β) Es sei $x \overset{R}{\sim} y \Rightarrow \exists\, A \in S$ mit $x, y \in A \Rightarrow y \overset{R}{\sim} x$

γ) Es sei $x \overset{R}{\sim} y$, $y \overset{R}{\sim} z \Rightarrow \exists\, A_1 \in S$ mit $x, y \in A_1$ und $A_2 \in S$ mit $y, z \in A_2$,

dann ist insbesondere $y \in A_1 \cap A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A \cap A' = \Phi} A_1 = A_2 \Rightarrow x, z \in A_1 \Rightarrow x \overset{R}{\sim} z$

Weitere Erklärung zu 1.) und 2.):

Annahme: Auf $M \neq \emptyset$ ist für gewisse, nicht notwendig alle, Paare von Elementen x,y auf eine nicht weiter interessierende Weise eine ÄR erklärt. Für ein festes $x \in M$ betrachten wir die Menge

$T_x := \{u \in M : u \overset{R}{\sim} x\}$.

Trivial: $T_x \subset M$ und wegen Reflexivität gehört $x \in T_x$.

Angenommen die Mengen T_x und T_y seien nicht disjunkt sondern

$\exists$ mindestens ein $z \in T_x \cap T_y \Rightarrow z \overset{R}{\sim} x$ und $z \overset{R}{\sim} y$.

$u \in T_x$ beliebig $\Rightarrow u \overset{R}{\sim} z$.

$z \overset{R}{\sim} x \underbrace{\Rightarrow}_{Symmetrie} x \overset{R}{\sim} z \Rightarrow u \overset{R}{\sim} x$ und $x \overset{R}{\sim} z \underbrace{\Rightarrow}_{Transitivität} u \overset{R}{\sim} z \underbrace{\Rightarrow}_{z \sim y, Transitivität} u \overset{R}{\sim} y \Rightarrow u \in T_y$

$\Rightarrow T_x \subset T_y$.

Anolog nach Rollentausch von x und y $T_y \subset T_x$. T_y, T_x sind also entweder identisch oder disjunkt. Sei P Gesamtheit aller T_x, dann ist P eine Partition von M. P erzeugt in der oben geschilderten Weise eine ÄR $\tilde{P}$ auf M.

Aus der Def dieser Relation einerseits und der Def der Mengen von P andererseits ergibt sich die Aussage $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x \tilde{P} y$. Die von P erzeugte ÄR stimmt also mit der ursprünglichen vorhandenen überein.

A0.2.3

a) Es sei M eine beliebige Menge$\neq\emptyset$. Die Relation $\overset{R}{\sim}$ auf MxM sei wie folgt definiert: $(x_1, x_2) \overset{R}{\sim} (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_2 = y_2$

Zeige, dass $\overset{R}{\sim}$ eine ÄR (auf M) ist und bestimme alle ÄK.

//2.)Eine Relation R auf X ($R \subset X \times X$!) heißt Äquivalenzrelation (ÄR): ⇔

//   R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

//**D0.2.2** (100)

//Schreibweise: $(x,y)\in R \Leftrightarrow x \overset{R}{\sim} y$, auch wenn $R\subset X\text{x}X$

//1.)Eine Relation R auf X (d.h. $R\subset X\text{x}X$) heißt,

// reflexiv: $\Leftrightarrow \forall\ x\in X$ gilt $x \overset{R}{\sim} x$ (d.h. $(x,x)\in R$) *D0.2.3 (105)*

// symmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\ x,y\in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y \Rightarrow y \overset{R}{\sim} x$

// (d.h. $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x) \in R$)

// transitiv: $\Leftrightarrow \forall\ x,y,z \in X$ mit $x \overset{R}{\sim} y$ und $y \overset{R}{\sim} z \Rightarrow x \overset{R}{\sim} z$

// (d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$)

Bew:#Dummys Vorabüberlegungen

#Sei M={1,2,3,4}

MxM: (1,1) (1,2) (1,3) (1,4)

(2,1) (2,2) (2,3) (2,4)

(3,1) (3,2) (3,3) (3,4)

(4,1) (4,2) (4,3) (4,4)

$\overset{R}{\sim}$ ist Relation $\Rightarrow \overset{R}{\sim} \subset M\text{x}M$

$(y_1,y_2)=(1,2)$, $(x_1,x_2)=(3,2)\in \overset{R}{\sim}$.

$\forall\ y_1,x_1\in M\ \exists\ x_2=y_2\in M$: $(x_1,x_2) \overset{R}{\sim} (y_1,y_2)$: $\Leftrightarrow x_2=y_2 \Rightarrow \overset{R}{\sim} = M\text{x}M$ aber

falls Relation nicht auf MxM eventuell nur $\overset{R}{\sim} \subset N\text{x}O$

$\overset{R}{\sim}$ ÄR? $x_1=2$, $y_1=2$, $x_2=y_2=2 \Rightarrow \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (2,2) \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (2,2)$ ...~ reflexiv?

$(2,3) \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (4,3) \Rightarrow\wedge\ (4,3) \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (2,3)$ ...symmetrisch?

$(1,2) \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (4,2) \wedge (4,2) \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (3,2) \Rightarrow (1,2) \underbrace{\overset{R}{\sim}}_{x_2=y_2} (3,2)$..transitiv?

ÄK?: $(x_1,3)|_R = \{(y_1,y_2)\in M\text{x}M \mid (y_1,y_2) \overset{ÄR}{\sim} (x_1,3)\} = \{(y_1,3)\in M\text{x}M \mid y_2=x_2=3\} =$

$\{(y_1,3) \mid y_1\in M\} = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

Permutation farbig oben bei MxM

Jetzt

$\sim$ ist reflexiv: $x_1=y_1 \Rightarrow (x_1,x_2) \overset{R}{\sim} (x_1,x_2)\ \forall\ x_1,x_2\in M\text{x}M \Rightarrow$

$\sim$ ist symmetrisch:Sei $(x_1,x_2) \overset{R}{\sim} (y_1,y_2) \Rightarrow x_2=y_2, y_2=x_2 \Rightarrow$

$(y_1,y_2) \overset{R}{\sim} (x_1,x_2) \Rightarrow \forall\ (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in M\text{x}M$

auch in $(y_1,y_2) \overset{R}{\sim} (x_1,x_2)$ sind die rechts stehenden

Elemente gleich

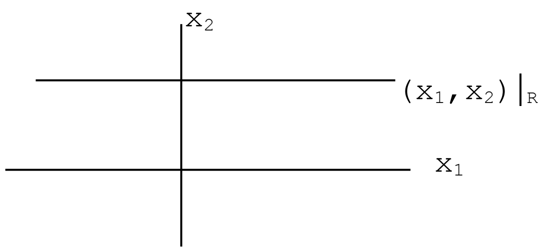
$\sim$ ist transitiv: Seien $(x_1,x_2) \overset{R}{\sim} (y_1,y_2) \overset{R}{\sim} (z_1,z_2)$

$x_2=y_2 \wedge y_2=z_2 \Rightarrow x_2=z_2 \Rightarrow$

$(x_1,x_2) \overset{R}{\sim} (z_1,z_2)\ \forall\ (x_1,x_2),(y_1,y_2)(z_1,z_2)\in M\text{x}M$

ÄK: $(x_1,x_2)|_R = \{(y_1,y_2)\in M\text{x}M \mid (y_1,y_2) \overset{ÄR}{\sim} (x_1,x_2)\} = \{(y_1,y_2)\in M\text{x}M \mid y_2=x_2\} =$

$\{(y_1,x_2) \mid y_1\in M\}$



z.B. M=$\mathbb{R}$ $(x_1,x_2)|_R$ ist hier Gerade durch $0,x_2$ parallel zur x_1 Achse.

Bem: $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\bigcup_{x_n\in R}(x_1,x_2)|_R$ disjunkte Vereinigung

(Partition von $\mathbb{R}^2$, vgl S0.2.1) $x_2=y_2$ und $y_2=z_2 \Rightarrow x_2=z_2 \Rightarrow$

b) ● Auf $\mathbb{R}$ gilt

$x \overset{R}{\sim} y$ genau dann, wenn $xy\geq 0$,
Äquivalenzrelation? Ggf Äquivalenzklassen zu x=2?
Lös:

$x \overset{R}{\sim} y$ symmetrisch, da $xy=yx$; reflexiv, da $x*x\geq 0$,

nicht transitiv, da $1 \overset{R}{\sim} 0$ wegen $1*0=0$, $0\sim -1$ wegen $0*(-1)=0$ aber

$1 \overset{ÄR}{\not\sim} -1$ wegen $1*(-1)<0$

Keine Äquivalenzrelation

●● Auf $\mathbb{R}$ gilt

$x \overset{R}{\sim} y$ genau dann, wenn $x-y=z\in\mathbb{Z}$.
Äquivalenzrelation? Ggf zu x=2? Äquivalenzklassen?

Lös: $x \overset{R}{\sim} y$ reflexiv da $\forall\, x\in\mathbb{R}$: $x \overset{\sim}{=} x$ wegen $x-x=0\in\mathbb{Z}$;

$x \overset{R}{\sim} y$ symmetrisch, da $z=x-y\in\mathbb{Z} \Rightarrow -z=y-x \underbrace{\in}_{z\in Z\Rightarrow -z\in Z} \mathbb{Z}$;

$x \overset{R}{\sim} y$ transtiv, da $x \overset{R}{\sim} y \in\mathbb{Z} \wedge y \overset{R}{\sim} z \in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z} \wedge y-z\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$x-z=((x-y)+(y-z))\in\mathbb{Z} \Rightarrow x \overset{R}{\sim} z$

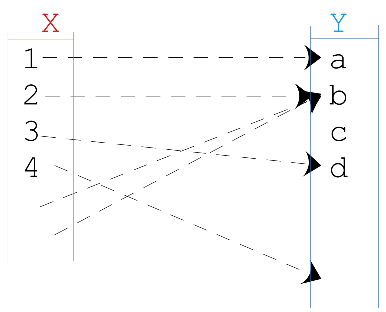
$x \overset{\sim}{=} y$ ist Äquivalenzrelation $\overset{ÄR}{\sim}$

\# $2|_R := \{y\in\mathbb{R} \mid y \overset{ÄR}{\sim} 2\}=\{y\in\mathbb{R} \mid (2,y)\in R\}=\{y\in\mathbb{R} \mid (2-y)\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$

\# $\mathbb{Z}|_R := \mathbb{Z}$, Partition $P=\bigcup_{x\in R}\{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\}=\bigcup_{x\in[0,1]}\{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$

D0.2.3(106)

1.) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Eine (eindeutige) Abbildung oder Funktion f von X in Y oder von X nach Y ist eine Relation von X zu Y ($f\subset X\times Y$) mit der Eigenschaft: $\forall\, x\in X$: $\exists$ genau ein ($\exists_1$) $y\in Y$ mit $(x,y)\in f$
Bsp:



a=f(1)
b=f(6), b=f(2), b=f(5)

d=f(3)

5 e
6 f
g g=f(4)

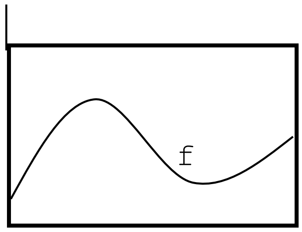
Bez:$f:X\to Y$, $y=f(x)$, $x \mapsto y=f(x)$=das Bild von x unter der Abb f:
$X^Y:=\{f|f:X\to Y\}$=Menge aller Abb. f: $X\to Y$

Wir schreiben für das y mit $x\overset{R}{\sim}y$:y=f(x) und $f:X\to Y$ mit
$x \mapsto y=f(x)$ für die Abbildung, kurz f oder f().

Bsp:$x\overset{R_1}{\sim}y$, $x\overset{R_2}{\sim}y$ (siehe oben) sind Abbildungen
$x\overset{R_3}{\sim}y$ $x\overset{R_4}{\sim}y$ keine Abb, d.h. nicht jedem x ein y zugeordnet bzw nicht nur ein y

Abb f

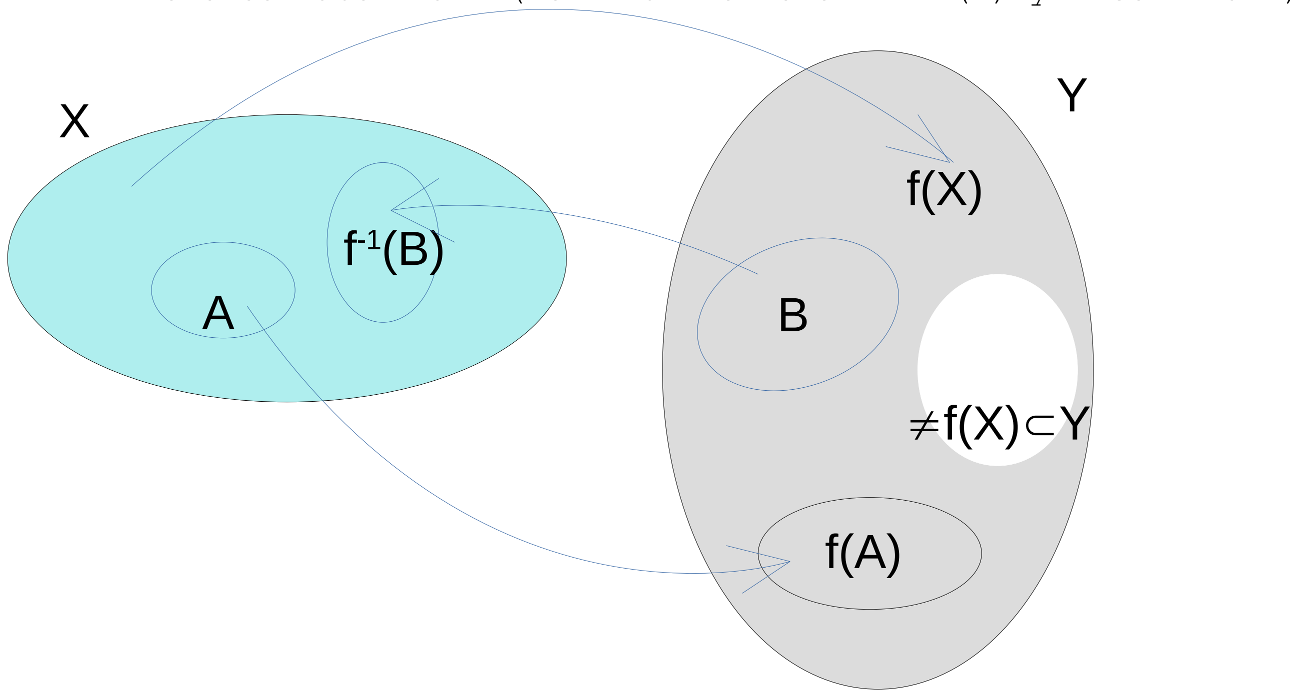
XxY



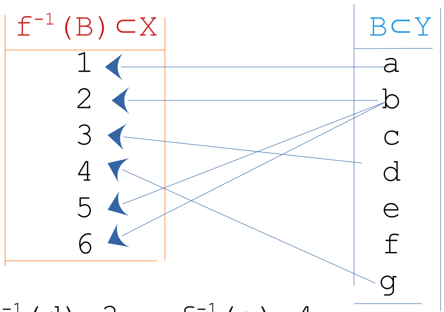
2.)Zwei Funktionen f_i: $X_i\to Y_i$ i=1,2 heißen gleich:$\Leftrightarrow$
$X_1=X_2$ und $Y_1=Y_2$ und $f_1(x)=f_2(x)$ $\forall$ $x\in X_1$
Bez:$f_1=f_2$ oder $f_1=f_2$ auf $X_1(=X_2)$
Bem:Gilt $f_1=f_2$ so ist $G(f_1)=G(f_2)$ (G...Graph).

3.)Bei geg Funktion f: $X\to Y$ heißt
a)X der Definitionsbereich von f
b)Y der Wertebereich oder Wertevorrat oder Bildbereich von f
c)$G(f):=\{x,f(x)|x\in X\}= f\subset XxY$ der Graph von f oder
R=graph $f=\{x,f(x)|x\in X\}\subset XxY$
d)$f(A):=\{f(x)|\ x\in A\}$ das Bild der Teilmenge $A\subset X$ unter f.
$(=\{y\in Y|\ \exists\ x\in A:\ y=f(x)\})$, $(x,y)\in f$.
f(X):Wertemenge von f=Im(f), $f\subset Y$
e)$f^{-1}(B):=\{x\in X|\ f(x)\in B\}$,d.h. das Urbild der Teilmenge $B\subset Y$
Falls B nur ein Element hat, etwa b, schreiben wir auch

$f^{-1}(b)$ anstatt $f^{-1}(B)$.
Beachte aber, dass $f^{-1}(b)$ mehrere, evtl sogar unendlich viele Elemente haben kann (weil für mehrere $x\in X$ $f(x)=y\in B$ sein kann)

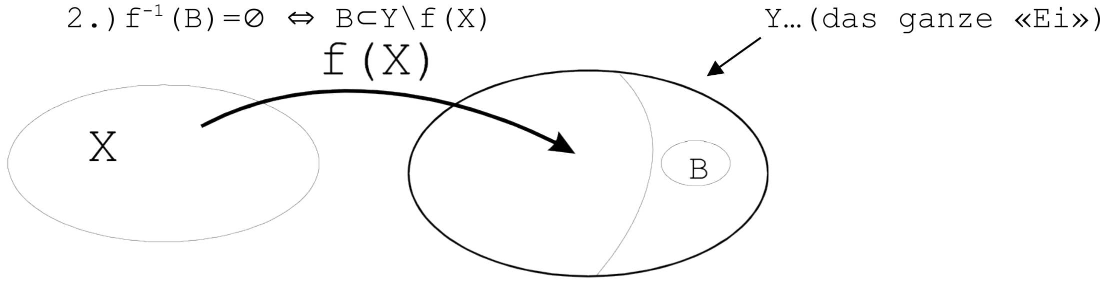


$1=f^{-1}(a)$
$2=f^{-1}(b)$,
$3=f^{-1}(d)$
$4=f^{-1}(g)$
$5=f^{-1}(b)$
$6=f^{-1}(b)$



$f^{-1}()=1$; $f^{-1}(b)=\{6,2,5\}$; $f^{-1}(d)=3$; $f^{-1}(g)=4$

Bem: Für $f: X\to Y$ gilt
1.) $f(A)=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing$
2.) $f^{-1}(B)=\varnothing \Leftrightarrow B\subset Y\setminus f(X)$

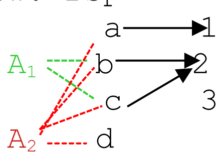


3.) $x_1=x_2 \in X \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

```
#          f(x₁)
#   x <                 ...das ist keine Funktion, da nicht ∃₁ y∈Y...gilt
#          f(x₂)
```

A0.2.4 Vor: $A\neq\varnothing$, $A_1,A_2\subset X$, Beweise: $A_1\subset A_2 \Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$

Bew: Bsp



$f(A_1)=\{2\}$
$f(A_2)=\{1,2\}$

$\forall\ x\in A_1$ gilt $x\in A_2$
z.z: $\forall\ y\in f(A_1)$ gilt $y\in f(A_2)$
Sei $y\in f(A_1)$, y baf $\Rightarrow$
$\exists\ x\in A_1: f(x)=y \underbrace{\Rightarrow}_{Vor} \underbrace{\Rightarrow}_{Vor}$
$\exists\ x\in A_2: f(x)=y \Rightarrow y\in f(A_2)$

A0.2.5 Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. Die Mengen A_1,A_2 seien Teilmengen von A während B_1,B_2 Teilmengen von B seien.
Beweise: $B_1\supset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$

Bew: "$\subset$" von $\Leftrightarrow$ gilt zunächst nur $f^{-1}(B_1\setminus B_2)\subset f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$

$\Rightarrow$ Sei $x\in f^{-1}(B_1\setminus B_2)$ baf $\Leftrightarrow$

$f(x)\in B_1\setminus B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{B_2\subset B_1} f(x)\in B_1 \wedge f(x)\notin B_2 \Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1) \wedge x\notin f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$

" $\supset$" siehe oben Teil $\Leftarrow$ von $\Leftrightarrow$

A0.2.6 Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f: X\to Y$ eine Abbildung.
Zeige für $A\subset X$, $B\subset Y$: $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$; $f^{-1}(B)=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\}$

a) $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$

Bew: $x\in f^{-1}(Y\setminus B) \underset{\text{Def Urbild}}{\Leftrightarrow} f(x)\in Y\setminus B \wedge x\in X \Leftrightarrow f(x)\notin B \wedge x\in X \wedge f(x)\in Y$
$\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B) \wedge x\in X \Leftrightarrow x\in X\setminus f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(f(A))\supset A$

//D0.2.3 3.)(105) $f: X\to Y$: d) $f(A):=\{f(x)\,/\,x\in A\}$ Bild der Teilmenge $A\subset X$//
//unter f. $(=\{y\in Y\,/\,\exists\, x\in A: y=f(x)\})$, $(x,y)\in f$.//
//e) $f^{-1}(B):=\{x\in X\,/\,f(x)\in B\}$//

Bew: Sei $x\in A$ beliebig $\underset{D=0.2.3\ 3.)}{\Rightarrow} f(x)\in \underbrace{f(A)}_{\tilde{B}} \Leftrightarrow x\in f^{-1}(\tilde{B})=f^{-1}(f(A))$

c) $f(f^{-1}(B))\subset B$

Bew: Sei $y\in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\tilde{A}}) \underset{D=0.2.3\ 3.)}{\Rightarrow} \exists\ \underbrace{x\in\tilde{A}=f^{-1}(B)}_{d.h.\ y=f(x)\in B} \wedge f(x)=y \Leftrightarrow y=f(x)\in B$

A0.2.7 Sei $f:X\to Y$ eine Funktion und $A,B\subset X$ und $C,D\subset Y$. Zeige:
a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ und finde ein Beispiel mit $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$
c) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$
d) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion $f:X\to Y$ (108)

a) (.) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)\ \forall\ A,B\subset X$ (..) $f(\bigcup_{M\in S} M)=\bigcup_{M\in S} f(M)\ \forall\ M\subset X$

Bew: (.) "$\subset$" $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$
Sei $y=f(A\cup B)$, y baf $\Rightarrow \exists\ x\in A\cup B: f(x)=y \Rightarrow$
$\exists\ x\in A \vee \exists\ x\in B: f(x)=y \Rightarrow \exists\ y\in f(A) \vee \exists\ y\in f(B) \Rightarrow$
$y\in f(A)\cup f(B): f(x)x=y$

"$\supset$ " $f(A\cup B)\supset f(A)\cup f(B)$
Sei $y\in f(A)\cup f(B) \Rightarrow y\in f(A) \vee y\in f(B) \Rightarrow$
$x_1\in A: f(x_1)=y \vee x_2\in B: f(x_2)=y \Rightarrow \exists\ x\in A\cup B: f(x)=y$
($x_1 \vee x_2$ oder beide, eines erfüllt Bedingung auf jeden Fall)
$\Rightarrow y\in f(A\cup B)$
"$\subset$" und "$\supset$", d.h. „="

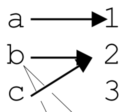
(..) $y\in f(\bigcup_{M\in S} M) \Leftrightarrow \exists\ x\in \bigcup_{M\in S}: y=f(x) \Leftrightarrow \exists\ M\in S$ und $\exists\ x\in M: y=f(x)$

$\Leftrightarrow \exists\ M\in S:\ y=f(M)\ \Leftrightarrow\ y\in \bigcup_{M\in S} f(M)$

b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\ \ \forall\ A,B\subset X,$

$f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap_{M\in S} f(M),\ M\subset X$

sonstiges: $A,B\subset X,\ A\cap B=\emptyset$ und $f=const,\ X\neq\emptyset\ \Rightarrow\ f(A\cap B)=\emptyset,\ f(A)\cap f(B)\neq\emptyset$

Bsp: 

$A=\{a,b\},\ B=\{a,c\}\ \Rightarrow\ A\cap B=\{a\}$

$f(A\cap B)=f(\{a\})=\{1\}\neq f(A)\cap f(B)=f(\{a,b\})\cap f(\{a,c\})=$
$\{1,2\}\cap\{1,2\}=\{1,2\}\ \Rightarrow$

$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

Bew: $y\in f(\bigcap_{M\in S} M)\ \Leftrightarrow\ \exists\ x\in \bigcap_{M\in S} M: y=f(x)\ \Rightarrow$

$\forall\ M\in S\ \exists\ x_M\in M$ (dasselbe x $\forall$ M) $\wedge$ $y=f(x)\ \Leftrightarrow\ \forall\ M\in S:\ y\in f(M)$

$\Leftrightarrow\ y\in \bigcap_{M\in S} f(M)\ \ \forall\ M\in S: y\in f(M)\ \Leftrightarrow\ y\in \bigcap_{M\in S} f(M)$

Andere Formulierung:
Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. Die Mengen A_1,A_2 seien Teilmengen von A, während B_1,B_2 Teilmengen von B seien.
Beweise: $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$
Lös: Sei $y\in f(A_1\cap A_2)\ \Rightarrow\ \exists\ x\in(A_1\cap A_2): f(x)=y\ \Rightarrow$
$y\in f(A_1)$ (da $x\in A_1$) $\wedge$ $y\in f(A_2)$ (da $x\in A_2$) $\Rightarrow\ y\in f(A_1)\cap f(A_2)$
$\subset$, nicht $=$, da $x'\notin A_1\cap A_2$ aber $f(x')\in f(A_1)\cap f(A_2)$ sein kann,
(siehe auch Bsp oben)

c) $f^{-1}(A\ \cup\cap\ B)=\ f^{-1}(A)\ \cup\cap\ f^{-1}(B)\ \ \forall A,B\subset Y,$

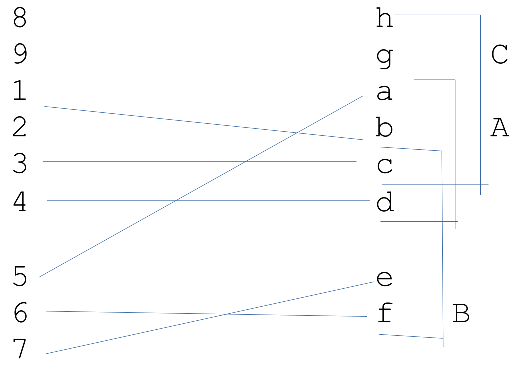
(.) $f^{-1}(\bigcup_{M\in S} M)=\bigcup_{M\in S} f^{-1}(M)$, (..) $f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M)=\bigcap_{M\in S} f^{-1}(M)$, $M\subset Y$

Bew: (.) $x\in f^{-1}(\bigcup_{M\in S} M)\ \Leftrightarrow\ \exists\ y\in \bigcup_{M\in S} M: y=f(x)\ \Leftrightarrow$

$\exists\ M\in S\ \wedge\ \exists\ y\in M:\ y=f(x)\ \Leftrightarrow\ \exists\ M\in S:\ x\in f^{-1}(M)\ \Leftrightarrow$
$x\in \bigcup_{M\in S} f^{-1}(M)$

(..) $f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M)=\bigcap_{M\in S} f^{-1}(M)$

Beispielüberlegungen:



$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$
$A\cap B=\{c,d\}$, Sei $f^{-1}(A\cap B)=\{3,4\}$
$f^{-1}(a),f^{-1}(b)\in A,\ f^{-1}(e),f^{-1}(f)\in B,$
können $\underbrace{\textit{nicht}}_{D0.2.3:\exists_1}$ $\in$ von $f^{-1}(A\cap B)=\{3,4\}$
sein da bereits $f(3)=c,\ f(4)=d$
$f^{-1}(A)=f^{-1}\{a,b,c,d\}=\{5,1,3,4\}$
$f^{-1}(B)=f^{-1}\{c,d,e,f\}=\{3,4,7,6\}$
$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\{5,1,3,4\}\cap\{3,4,7,6\}=\{3,4\}$

//D0.1.4 2.) (4) $M_1\cap M_2:=\{x/x\in M_1$ und $x\in M_2\}$//
//(D0.2.3 3.)(105) e) $f^{-1}(B):=\{x\in X/\ f(x)\in B\}$, Urbild $B\subset Y$//
// Bem 3.) $x_1=x_2\in X\ \Rightarrow\ f(x_1)=f(x_2)$
//**D0.2.3**(106)
//1.) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Eine (eindeutige) Abbildung oder Funktion f
// von X in Y oder von X nach Y ist eine Relation von X zu Y ($f\subset X\mathrm{x}Y$)
// *mit der Eigenschaft: $\forall\ x\in X:\ \exists$ genau ein ($\exists_1$) $y\in Y$ mit $(x,y)\in f$*

Bew: $f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M) \subset \bigcap_{M\in S} f^{-1}(M)$

$x\in f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M) \Leftrightarrow \exists\, y\in \bigcap_{M\in S} M: y=f(x) \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Rightarrow} \forall\, M\in S\ \exists\, y\in M:\ y=f(x) \underset{D0.2.3\ 3.e)}{\Rightarrow}$

$\forall\, M\in S:\ x\in f^{-1}(M) \Leftrightarrow x\in \bigcap_{M\in S} f^{-1}(M) \Leftrightarrow f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M) \subset \bigcap_{M\in S} f^{-1}(M)$

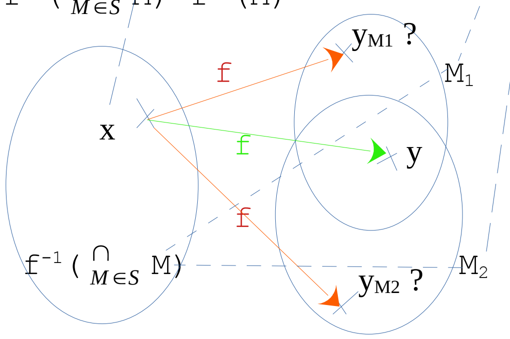
$f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M) \supset \bigcap_{M\in S} f^{-1}(M)$

$\forall\, M\in S: x\in \bigcap_{M\in S} f^{-1}(M) \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Rightarrow} \forall\, M\in S\ \exists\, y=y_{M\ldots\text{abhängig von }M}\in M:\ y_M=f(x).$

Da f Funktion(s Bem3), ist y_M dasselbe y $\forall\, M\in S \Rightarrow$

$\exists\, y\in \bigcap_{M\in S} M:\ y=f(x) \Leftrightarrow x\in f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M) \Rightarrow f^{-1}(\bigcap_{M\in S})\supset f^{-1}(M)$

$f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M)=f^{-1}(M)$



Beispielskizze für 2 Mengen
f kann nicht sein:..$\exists_1$...in D0.2.3 1.)
also ist nur f möglich

A0.2.8 $X\neq\emptyset$, $A,B\subset X$, $f(X)\to Y$ Abbildung

a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$

Bew:# Überlegung: Sei $y\in A \wedge x\in B \wedge x\notin A$: $y\in A \wedge y\in B\ \forall\, y\in A \Rightarrow A\subset B$

$y\in f(A)\setminus f(B) \Leftrightarrow y\in f(A) \wedge y\notin f(B)$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, x\in A:\ y=f(x) \wedge \forall\, \tilde{x}\in B\ y\neq f(\tilde{x}) \Rightarrow \exists\, x\in A\setminus B:\ y=f(x))$

$\Leftrightarrow y=f(A\setminus B) \Leftrightarrow f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$

b) Bedingung für $f(A)\setminus f(B)= f(A\setminus B)$?

Lös: Vorher D0.2.4 lesen

nach a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$, gesucht Bedingung für $f(A)\setminus f(B)\supset f(A\setminus B)$

$x\in A,\ \tilde{x}\in B,\ x\neq\tilde{x} \Rightarrow x\in A\setminus B \Rightarrow y=f(A\setminus B)=f(x)$

Fall $y=f(x) \underset{f\ surjektiv}{=} f(\tilde{x})\in f(B) \Rightarrow y\notin f(A)\setminus f(B) \not\Rightarrow f(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$

Fall $y=f(x) \underset{f\ injektiv}{=} f(\tilde{x})\notin f(B) \Rightarrow y\in f(A)\setminus f(B) \Rightarrow f(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$

$\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow f(A)\setminus f(B)= f(A\setminus B)$