1(300) Axiomatische Einführung der reellen und komplexen Zahlen

1.1(300) Gruppen und Körper

Zahlen	Einführungsgrund
1.)natürliche Zahlen $\mathbb{N}:=\{1,2,3,...\}$ $\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,3,...\}$	Abzählung
2.)ganze Zahlen $\mathbb{Z}:=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-1.-2.-3...\}$ $=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}$	Lösen von Gleichungen der Form x+n=m mit n,m $\in\mathbb{N}$. Menge der ganzen Zahlen
3.)rationale Zahlen $\mathbb{Q}:=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in Z, q\in N\right\}$	Lösen von Gleichungen der Form x·n=m mit n,m$\in\mathbb{Z}$. Menge der rationalen Zahlen
4.)reelle Zahlen $\mathbb{R}$	Lösen geometr. Aufg. 2π Einheitskreisumf Grenzwerte von Zahlenfolgen aus $\mathbb{Q}$. $x^2=2$
5.)komplexe Zahlen	Lösen quadrat.Gleichungen $x^2+1=0$

„Bürgerliches Rechnen" muss nun erst mal vergessen werden. Es werden Mengen und die Zusammenhänge zwischen Elementen von Mengen betrachtet. Dazu werden Verknüpfungen zwischen Elementen der Mengen definiert.
Im Folgenden werden Verknüpfungen, insbesondere 2 unterschiedliche Verknüpfungen $\oplus,\otimes$ definiert, die nicht mit den aus dem bürgerlichen Rechnen bekannten Plus + und Mal * identisch sind, aber wie im Verlauf der folgenden Betrachtungen ersichtlich sein wird, in gewissen Umgebungen identisch sein <u>können</u> (siehe (RR) in Körpern).

Mengen und Verknüpfungen

D1.1.1(300)
Eine Verknüpfung ordnet durch eine Vorschrift Elementen einer Menge, Elemente genau dieser Menge zu. Dadurch entsteht ein Verknüpfungsgebilde.

Zweistellige innere Verknüpfung einer Menge:
- Menge M, mit einer auf ihr definierten Verknüpfung. Symbol: $\circ$
- $M\neq\emptyset$
- $M\times M\rightarrow M$: $a,b\in M$ wird $a\circ b\in M$ zugeordnet.

Schreibweise $(M,\circ)$

Bsp: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\ldots\}$, Verknüpfung $\circ$: + (Addition)
$1+2=3\in\mathbb{N}$, $2+4=6\in\mathbb{N}$, ... $\Rightarrow$ Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{N},\circ)=(\mathbb{N},+)$

$\circ$: Division...a:b
$2:5\notin\mathbb{N} \Rightarrow (\mathbb{N},\circ)=(\mathbb{N},:)$ kein Verknüpfungsgebilde

D1.1.2 (301)
a) Kommutatives Verknüpfungsgebilde
$\forall$ $a,b\in M$ gilt $a\circ b=b\circ a \Leftrightarrow (M,\circ)$ heißt kommutatives Verknüpfungsgebilde
Bsp:● $\circ$: + (Addition), $(\mathbb{N},\circ)=(\mathbb{N},+)$
$\mathbb{N}=\{\underbrace{1}_{a}1,2,\underbrace{3}_{b},4\ldots\}\ldots$ $1+3=3+1\in\mathbb{N} \Rightarrow$ kommutatives Verknüpfungsgebilde

● $(\mathbb{Q},\circ)=(\mathbb{Q},:)$, $\frac{3}{4}:\frac{7}{5}=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}\neq\frac{7}{5}:\frac{3}{4}=\frac{28}{15} \Rightarrow$
$(\mathbb{Q},:)$ kein kommutatives Verknüpfungsgebilde

b) Assoziatives Verknüpfungsgebilde
$\forall$ $a,b\in M$ gilt $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)\Leftrightarrow$
$(M,\circ)$ heißt assoziatives Verknüpfungsgebilde
Bsp:● $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\ldots\}$, $(\mathbb{N},\circ)=(\mathbb{N},+)$
$(1+2)+3=6=1+(2+3)\in\mathbb{N} \Rightarrow (\mathbb{N},+)$ assoziatives Verknüpfungsgebilde

● $(\mathbb{Q},\circ)$, $\circ=\frac{a+b}{2}$, gewählt $2,4,6\in\mathbb{Q}$,
$(2\circ4)\circ6=(\frac{2+4}{2})\circ6=3\circ6=\frac{3+6}{2}=4{,}5\in\mathbb{Q}$
$2\circ(4\circ6)=2\circ\frac{4+6}{2}=2\circ5=\frac{2+5}{2}=3{,}5\in\mathbb{Q}$
$\Rightarrow (2\circ4)\circ6\neq2\circ(4\circ6)$,
$\Rightarrow (\mathbb{Q},\circ)$ kein assoziatives Verknüpfungsgebilde

c) Verknüpfungsgebilde mit Existenz von neutralen Elementen
Vor: $n\in M$, $(M,\circ)$
Aussage: n heißt neutrales Element in $(M,\circ)\Leftrightarrow$
$\forall$ $a\in M$ gilt $a\circ n=n\circ a=a$

Bsp: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\ldots\}$,	$(\mathbb{N},*)$		$(\mathbb{N},+)$	$(\mathbb{N}_0,+)$
	$1*?=1$	$1*1=1$	$1+?=1$	$1+0=1$
	$2*?=2$	$2*1=2$	$2+?=2$	$2+0=2$
	$3*?=3$	$3*1=3$	$3+?=3$	$3+0=3$
	……	….	…	...
		$n=1$	$0\notin\mathbb{N} \Rightarrow$ kein n	$n=0\in\mathbb{N}_0$

d) Verknüpfungsgebilde mit Existenz von inversen Elementen
Vor: $a,n\in M$, $(M,\circ)$, (n neutrales Element)
Aussage: In $(M,\circ)$ heißt $a'\in M$ inverses Element von a $\Leftrightarrow$
$a\circ a'=a'\circ a=n$

Bsp: $(\mathbb{Z},+)\Leftrightarrow n=0$	$(\mathbb{Z},+)$	$(\mathbb{Q},*)$	$(\mathbb{N},*)$
	$7+(-7)=0$	$4*\frac{1}{4}=1$	$7*?=1$
	$-5+(+5)=0$	$\frac{7}{8}*\frac{8}{7}=1$	$?\notin\mathbb{N} \Rightarrow \nexists\ a'\in\mathbb{N} \Rightarrow$

kein Verknüpfungsgebilde

mit Existenz von inversen Elementen

D1.1.3(302)Menge $M_H \neq \emptyset$ ist Halbgruppe ⇔

(HG1) Zweistellige innere Verknüpfung $(M_H, \circ)$ nach D1.1.1
$(a,b,\ldots \in M_H,\ (a\circ b)\circ c \ldots \in M_H)$

(HG2) $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)\ \forall\ a,b,c\in M_H$ (Assoziativgesetz)

Bem: Jede Gruppe (siehe D1.1.4) ist eine Halbgruppe

Bsp: $(\mathbb{N},+)$, $a\circ b$... $2\circ 4=2+4=6\in M_H$ abgeschlossen,
$(2\circ 4)\circ 7=2\circ(4\circ 7)$
$(2+4)+7=2+(4+7)=13$

D1.1.4 (302)Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung $\circ$
(z.B +, * usw)
$G\times G\to G$, $G\circ G\to G$, $(a,b)\to a\circ b$,
sodass folgende Axiome $\forall\ a,b,c\in G$ erfüllt sind:

(G1) Assoziativgesetz $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

(G2) $\exists$ neutrales Element $e\in G$, $a\circ e=a$

(G3) $\forall\ a\in G\ \exists$ Inverses Element $a'\in G$: $a\circ a'=e$

(G4a) Gruppe G heisst abelsch, falls G Gruppe und $a\circ b=b\circ a\ \forall\ a,b\in G$

Bem: Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G

Bsp:• Ist $(\mathbb{N},+)$ Gruppe? Nein, denn $\underbrace{a}_{\in N} + \underbrace{e}_{\in N\Rightarrow n\neq 0} \neq \underbrace{a}_{\in N}$ $(0\notin\mathbb{N}$!!!)

•• $(\mathbb{Z},+)$ Gruppe? Ja, 0 neutrales Element,
-a Inverses... $(a+(-a))=e=0$

••• $(\mathbb{Q}, a\circ b)$ Arithmetische Mittel ($\mathbb{Q}$...rationale Zahlen)

$$(a\circ b)\circ c= \frac{(aob)+c}{2}=\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c}{2}=\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2} \qquad \neq$$

$$(a\circ(b\circ c)= \frac{ao(\frac{b}{2}+\frac{c}{2})}{2}=\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4}$$ keine Gruppe!!

•••• Permutationen $P(M,\circ)$, $P(M)\times P(M)\to P(M)$

// # **DK3.1,1'** Permutationen ohne Wiederholungen (eigener Versuch)

// # Sei $X=\{1,2,\ldots,n\}$,

// # Abbildung $\underbrace{\pi_i}_{bijektiv}$: $X\to X$ ist eine Permutation von X

//# **DK3.1.1''** Jede Belegung einer geordneten Menge

//# $<\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)>$, π bijektiv,

// $\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)\in\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}=X$,

//# heist Permutation von X.
//Analysis 1
//**D0.2.5**(202) Seien f: X→Y und g:Y→Z vorgegeben, dann heißt die
//Abb.gof: X→Z definiert durch x g(f(x)) ∀ x∈X die
//zusammengesetzte oder verkettete Funktion aus f und g
//(Komposition von f mit g)
//Bem:1.)Die Komposition ist assoziativ, aber nicht kommutativ:
// (hog)of= ho(gof) fo(goh) = (fog)oh
// gof≠fog

Bew:Vorausbetrachtung, Ausgangspunkt geordnete Menge <1,2,3>

Sei $P_b=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $P_a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ … P_a= <2,1,3>

$P_b o P_a=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&1\end{pmatrix}$=<2,3,1>

Bsp für I_{dM}…: $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ ist auch eine Permutation

Bedingung (G1) Assoziativgesetz (aob)oc=ao(boc) erfüllt…:

DK3.1.1 Permutationen sind Abb $\underbrace{\Rightarrow}_{D\,0.2.5}$

$(P_a o P_b) o P_c=(P_a(P_b))P_c(M)=P_a(P_b(P_c(M)))=P_a o(P_b o P_c)$

Bedingung (G2)) ∃ neutrales Element e∈G, aoe=a erfüllt…:

$PoI_{dM}=P(I_{dM}(M))=P(M) \Rightarrow e=I_{dM}(M)$

Bedingung (G3) ∀ a∈G ∃ Inverses Element a´∈G: aoa´=e erfüllt…

∀ $\underbrace{P}_{bijektiv}$ (M)∈G ∃ Inverses Element $P^{-1}(M)$∈G:

$P(M)oP^{-1}(M)=P(P^{-1}(M))=I_{dM}(M)$

L1.1.1 (304)Sei G Gruppe

a) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt
b) Es gilt eoa=aoe=a ∀ a∈G
c) Zu gegebenem a∈G ist das Inverse eindeutig bestimmt
d) Es gilt a´oa=e (nicht nur aoa´=e)
e) $(a^{-1})^{-1}=a$, $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

Bew: d) Sei a∈G, a´ Inverses zu a, a´´ Inverses zu a´ ⇒
a´oa=(a´oa)oe=(a´oa)o(a´oa´´)=(a´o(aoa´))oa´´=(a´oe)oa´´=a´oa´´=e
b) eoa=(aoa´)oa=ao(a´oa)=aoe=a
a) Sei $\bar{e}$ ein weiteres neutrales Element zu e ⇒ eo$\bar{e}$=e
c) Sei $\bar{a}$ eine weitere Inverse zu a ⇒

$\bar{a} = e \circ \bar{a} = (a' \circ a) \circ \bar{a} = a' \circ (a \circ \bar{a}) = a' \circ e = a'$

Schreibweise: $\bar{a} = a^{-1} =$ Inverse zu a

e)// **D1.1.4**

// (G1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

// (G2) $e \in G$, $a \circ e = a$

// (G3) $a' \in G$: $a \circ a' = e$

// (G4a) abelsch, $a \circ b = b \circ a \ \forall\ a,b \in G$

$e \underbrace{=}_{D1.1.4(G3)} (a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} = (a^{-1}) \circ a \underbrace{=}_{D1.1.4\,(G2),\,(G3)} e \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$

$e \underbrace{=}_{D1.1.4\,(G3)} (a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = (a \circ b) \circ (a^{-1} \circ b^{-1}) \underbrace{=}_{D1.1.4\,(G2),\,(G3),\,(G4a)} e$

D1.1.5 (304) $H \in G$ heißt Untergruppe, falls H mit der Verknüpfung von G selbst eine Gruppe ist.

Bsp: $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{Q},+)$

L1.1.3 (304) H Untergruppe von G

a) Das neutrale Element von H ist das von G

Bew: Sei e_H das neutrale Element von H und e_H^{-1} das Inverse in G $\Rightarrow$

$e = e_H \circ e_H^{-1} = (e_H \circ e_H) \circ e_H^{-1} = e_H \circ e = e_H$

b) Ist $h \in H$, so ist $h^{-1} \in H$ und ist das Inverse bzgl H

Bew: $h \in H$, h' das Inverse bzgl H $\Rightarrow h \circ h' = e \Rightarrow h' = h^{-1}$

Bsp ● $(\mathbb{Z},+)$ abelsch...3+4=4+3 abelsch,

falls M mehr als 2 Elemente hat

●● $(\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}(\setminus\{0\},*)$ abelsch

●●● Permutationen P(M) ist nicht a,b∈G

\# **DK3.1.1'** Permutationen ohne Wiederholungen (eigener Versuch)

\# Bez: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) \ldots \pi(a_n) \end{pmatrix}$

Bew: Exemplarisch für $P(\underbrace{3}_{3\,Elemente})$

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Nebenrechnung $1 \underbrace{\rightarrow}_{\beta} 2 \underbrace{\rightarrow}_{\alpha} 3$, $\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

●●●● //**S1.5.16**(764) (Division mit Rest)

//∀ $p \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ ∃ eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und

//$r \in \{0,...,m-1\}$ mit $p=mq+r$ (Beweis siehe P15f Seite 764

\# Bem: $m \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \mathbb{N}$

\# $p/m=q+r/m$

\# Vorab zu Verknüpfung modulo...noch keine Definition

\# Bsp: 17:5=3 Rest 2… 17= 3 x5+2… 5 modulo 3=2

\# oder

\# -27:6=-5 Rest 3..-27=(-5)x6+3... -27 modulo 6=3

Sei $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ modulo m: $a,b \in \mathbb{Z}_{/m}=\{0,1,2..,m-1\}$

Definiere $a \oplus b$ = Rest$\in\{0,1,2,...,m-1\}$ von a+b nach Division durch m

m=2,

a⊕b: a=	b= 0	1
0	0	1
1	1	0

NR: $(0\oplus0):2=0$ Rest 0, $(0\oplus1):2=0$ Rest 1
$(1\oplus0):2=0$ Rest 1, $(1\oplus1):2=1$ Rest 0

m=3,

a⊕b: a=	b= 0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

m=5,

a⊕b: a=	b= 0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Feststellung $(\mathbb{Z}_{/m},\oplus)$ ist eine abelsche Gruppe

Bew: $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$?

- Es gilt $(a+b)+c=a+(b+c)$ ⇒ Reste modulo m sind gleich.
- Neutrales Element ist 0: $a+0=0$
- Inverses Element, sei $a \in \mathbb{Z}_{/m}$, setze $\underbrace{a'}_{0\le a'\le m-1} = \begin{cases} m-a & falls\ \ a\neq 0 \\ 0 & falls\ \ a=0 \end{cases}$

  Behauptung a' ist Inverses zu a

  1. Fall $a\neq0$: $a\oplus a'$= Rest von $a+a'$=Rest von $a+m-a$=
  Rest von m $\underbrace{=}_{m:m=1\,Rest\,0}$ 0

  2. Fall $a=0$: $a\oplus a'=0\oplus0=0$
- $a\oplus b$= Rest von $a+b=b+a$ ⇒ Rest von a+b=Rest von a+b= $b\oplus a$.

D1.1.6(306) Vor: Menge $M_R \neq \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
$\oplus: M_R x M_R \to M_R$ und $\otimes: M_R x M_R \to M_R$

$(M_R, \oplus, \otimes)$ ist ein Ring

$\Leftrightarrow$

es gelten für folgende Axiome:

- $(M_R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe
  - (R1⊕) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \in M_R, \ \forall\, a,b,c \in M_R$
  - (R2⊕) $\exists\, e \in M_R : a \oplus e = a \ \forall\, a \in M_R$
  - (R3⊕) $\exists\, e,\ a' \in M_R:\ a \oplus a' = e \ \forall\, a \in M_R$
  - (R4⊕) $a \oplus b = b \oplus a \in M_R, \ \forall\, a,b \in M_R$
- •• $(M_R, \otimes)$ ist Halbgruppe
  - (R1⊗) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \in M_R, \ \forall\, a,b,c \in M_R$
  - (R2⊗) $\exists\, n \in M_R,\ n=e$ oder $n \neq e$: $a \otimes n = n \otimes a = a \ \forall\, a \in M_R$
- ••• (RD⊕⊗) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b + a \otimes c \in M_R \ \forall\, a,b,c \in M_R$
  $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c \in M_R \ \forall\, a,b,c \in M_R$

Bsp: $\mathbb{Z} = \{...-2,-1,0,1,2,...\}$, $(\mathbb{Z},+,*)$

Bsp: $(\mathbb{Z},+)$ ist abelsche Gruppe
In $(\mathbb{Z},*)$ gilt D1.1.7 • und •• $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z},*)$ ist Halbgruppe
In $(\mathbb{Z},+,*)$ gilt das Distributivgesetz $a*(b+c)=\ldots.$
$(\mathbb{Z},+,*)$ ist ein Ring

D1.1.7(306) Vor: $K \neq \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
$\oplus: K x K \to K$ und $\otimes: K x K \to K$

$(K, \oplus, \otimes)$: ist ein Körper

$\Leftrightarrow$

Gruppe, wegen (K4⊕) abelsch

(K1⊕) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \in K, \ \forall\, a,b,c \in K$

(K2⊕) $\exists$ genau ein Element $n \in K$ mit $a \oplus \underbrace{0}_{\text{oder } e} = a \ \forall\, a \in K$

(K3⊕) $\forall\, a \in K\ \exists$ genau ein $-a \in K$ mit $a \oplus \underbrace{(-a)}_{\text{oder } a'} = \underbrace{0}_{\text{oder } e}$

(K4⊕) $a \oplus b = b \oplus a \in K \ \forall\, a,b \in K$

(K1⊗) Assoziativgesetz für ⊗: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c \ \forall\, a,b,c \in K$

(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:
$\exists$ genau ein Element $n \in K$ mit $\underbrace{1}_{\text{oder } n} \neq 0$ und $a \otimes n\ \underbrace{1}_{\text{oder } n} = a \ \forall\, a \in K$

(K3⊗) Existenz des bzgl ⊗ inversen Elements
$\forall\, a \in K \setminus \{0\}$, $\exists$ genau ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a \otimes a^{-1} = \underbrace{1}_{\text{oder } n}$

(K4⊗) Kommutativgesetz bzgl ⊗: $a \otimes b = b \otimes a \ \forall\, a,b \in K$

(KD⊕⊗) Distributivgesetz für ⊕ und ⊗: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Bezeichnung: rot korrespondiert mit Ring, blau zeigt Unterschied zum Ring

Beachte, dass das Ergebnis von ⊕ oder ⊗ per Definition wieder zu K gehören muss. Wir sagen auch: ein Körper ist immer abgeschlossen bezgl ⊕ und ⊗.
Sind die beiden Abbildungen Addition bzw Multiplikation, dann sind die Elemente des Körpers Zahlen. Jeder derartige Körper K enthält mindestens 2 Zahlen, nämlich 0 und 1 und es gibt einen Körper, der genau aus diesen Zahlen besteht:

Bem:1.) (K1⊕),(K2⊕),(K3⊕) bedeutet bzgl ⊕: $(K, \oplus)$ ist Gruppe,

die wegen (K4⊕) Abel'sch ist.
(K1⊗),(K2⊗),K3⊗) bedeuten, $(K\setminus\{0\},\otimes)$ ist Gruppe,
die wegen(K4⊗) Abel'sch ist

2.) Lässt man in (K2⊕) die Eindeutigkeit von 0 weg, so folgt diese aus (K4⊕):
Bew:"Falsche" Annahmen: $0\in K \wedge \bar{0} \in K$ mit $a\oplus 0=a \wedge a\oplus \bar{0}=a \;\forall\, a\in K \Rightarrow$

$$\bar{0}\oplus 0=\bar{0} \;\wedge\; 0\oplus\bar{0}=0 \underset{K4\oplus}{=} \bar{0}=\bar{0}\oplus 0=0\oplus\bar{0}=0$$

3.) Lässt man in (K3⊕) die Eindeutigkeit von -a weg, so folgt diese aus (K1⊗),(K2⊗),(K4⊕):
Bew: $a\oplus(-a)=0$, $a\oplus\bar{a}=0$ für $a\in K$

$$\bar{a} \underset{K2\oplus}{=} \bar{a}\oplus 0 = \bar{a}\oplus(a\oplus(-a)) \underset{K1\oplus}{=} (\bar{a}\oplus a)\oplus(-a) \underset{K4\oplus}{=} (a\oplus\bar{a})\oplus(-a)=$$
$$0\oplus(-a) \underset{K4\oplus}{=} (-a)\oplus 0 \underset{K2\oplus}{=} -a$$

4.) Analog folgt in (M2) die Eindeutigkeit der 0 mit (M4) und in (M3) folgt die Eindeutigkeit von a^{-1} für $a\neq 0$ auch aus den anderen Axiomen (K1⊗),(K2⊗),(K4⊗) statt ⊕→⊗

Konventionen: $a\otimes b\oplus c\otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $a-b:=a\oplus(-b)$

$-a-b:=(-a)\oplus(-b)$ $\frac{a}{b} := a/b := a:b := a\otimes b^{-1}, b\neq 0$

b^{-1}:= inverses Element von b

Zu (K3⊗): Sei $(a,a)\in K\times K\setminus\{(0,0)\}$
Ansatz: $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)=(a_1\otimes b_1-a_2\otimes b_2, a_1\otimes b_2\oplus a_2\otimes b_1)=(1,0)\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} a_1b_1-a_2b_2=1 \\ a_1b_2+a_2b_1=0 \end{matrix}\right\} \textit{unbekannt } b_1,b_2 \Leftrightarrow \quad b_1=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \quad b_2=\frac{-a_2}{(a_1^2+a_2^2)\neq 0}$$

NR: $b_2=\frac{a_1b_1-1}{a_2}$, $b_2=-\frac{a_2b_1}{a_1} \Rightarrow \frac{a_1b_1-1}{a_2}=-\frac{a_2b_1}{a_1} \Rightarrow \frac{a_2b_1}{a_1}+\frac{a_1b_1}{a_2}=\frac{1}{a_2} \Rightarrow$

$$b_1\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)=\frac{1}{a_2} \Rightarrow b_1\left(\frac{a_2^2+a_1^2}{a_1a_2}\right)=\frac{1}{a_2} \Rightarrow b_1\left(\frac{a_2^2+a_1^2}{a_1}\right)=1 \Rightarrow$$

$$b_1=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}\text{ €; geauso } b_2=\frac{-a_2}{(a_1^2+a_2^2)\neq 0}$$

5.) Ein Körper hat mindestens die Elemente 0 und 1

Bsp: ● Sei $K=\{0,1\}$ mit $0\oplus 0=0$, $0\oplus 1=1\oplus 0=1$, $1\oplus 1=0$,
$0\otimes 0=0$, $0\otimes 1=1\otimes 0=0$, $1\otimes 1=1$

Verknüpfungen als Tabelle:

⊕	0	1
0	0	1

⊗	0	1
0	0	0

1 1 0 1 0 1

alle der oben stehenden Axiome gelten, sodass K mit dieser Definition ein Körper ist:

(K1⊕) $(1\oplus 0)\oplus 1=1\oplus(0\oplus 1)=0$, $(1\oplus 1)\oplus 1=1\oplus(1\oplus 1)=1$ …usw

(K2⊕) neutrales Element 0: $1\oplus 0=1$, $0\oplus 0=0$

(K3⊕) Inverselemente $0=-0$, $1=-1$: $1\oplus(-1)=1\oplus 1=0$, $0\oplus(-0)=0$

(K4⊕) $1\oplus 0=0\oplus 1=1$ …usw

(K1⊗) $1\otimes(0\otimes 1)=(1\otimes 0)\otimes 1=0$ …usw

(K2⊗) neutrales Element $1\neq 0$: $0\otimes 1=0$, $1\otimes 1=1$

(K3⊗) 1 inverses Element $a^{-1}=1$ $\forall$ $a\in K\setminus\{0\}$, d.h für 1, $1\otimes 1=1$

(K4⊗) $1\otimes 0=0\otimes 1=0$ usw

(KD⊕⊗) $1\otimes(0\oplus 1)=(1\otimes 0)\oplus(1\otimes 1)=1$ usw

- ●● Geg $(K,\oplus,\otimes)$ $a\oplus b=a+b+1$, $a\otimes b=a+b+a*b$, $(K,\oplus,\otimes)$ Körper?

  Bez: 0 ist das neutrale Element, $(-a)$ das inverse Element in K.

  (K1⊕) $a\oplus(b\oplus c)=a\oplus(b+c+1)=a+b+c+1+1=a+b+1+c+1=(a\oplus b)+c+1=(a\oplus b)\oplus c$

  (K2⊕) $a\oplus 0=a$, $a\oplus 0=a+0+1 \Rightarrow a=a+0+1 \Rightarrow 0=-1$

  (K3⊕) $a\oplus(-a)=0=-1$, $a\oplus(-a)=a+(-a)+1 \Rightarrow -1=a+(-a)+1 \Rightarrow (-a)=-2-a$

  usw

●●● $Z_{/4}$={0,1,2,3}, 2=1⊕1, 3=1⊕1⊕1,
Definiere Addition + wie gehabt ⊕
Multiplikation ⊗ durch a⊗b= Rest von a*b nach
Division durch m=2

⊕	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

⊗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

//**D1.1.7** (K3⊗) Existenz des bzgl ⊗ inversen Elements
// ∀ a∈K\{0},∃ genau ein Element a^{-1}∈K mit a⊗a^{-1}=1
2⊗0=0, 2⊗1=2, 2⊗2=0, 2⊗3=2, 2⊗?=1 ⇒ 2 hat kein Inverses ⇒
$Z_{/4}$={0,1,2,3} kein Körper

Konstruktion eines Körpers K_4 mit 4 Elementen:
nach obigen Betrachtungen kann $Z_{/4}$={0,1,2=1⊕1,3=1⊕1⊕1} kein Körper sein d.h. K_4 kann <u>nicht</u> nur aus Elementen der Form
0,1,1⊕1,1⊕1⊕1,..bestehen ⇒

//**D1.1.7**(307)
//(K2⊕) Existenz des ⊕ neutralen Elements bzgl ⊕:

// $\exists$ genau ein Element $0 \in K$ mit $a \oplus 0 = a \ \forall\ a \in K$

//(K3$\oplus$) Existenz eines Inverselements bzgl $\oplus$:

// $\forall\ a \in K\ \exists$ genau ein $-a \in K$ mit $a \oplus (-a) = 0$

//(K2$\otimes$) Existenz des bzgl $\otimes$ neutralen Elements Eins:

// $\exists$ genau ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a \ \forall\ a \in K$

//(K3$\otimes$) Existenz des bzgl $\otimes$ inversen Elements

// $\forall\ a \in K \setminus \{0\}, \exists$ genau ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a \otimes a^{-1} = 1$

//(K4$\oplus$) Kommutativgesetz bzgl $\oplus$: $a \oplus b = b \oplus a \ \forall\ a,b \in K$

Annahme: $\underbrace{0}_{D1.1.7(A2\oplus),(A3\oplus)}$, $\underbrace{1}_{D1.1.7(M2\otimes),(M3\otimes)}$, $\underbrace{a}_{\neq 1, 1+1, 1+1+1 \ldots}$, $a \oplus 1 \in K_4$, $\underbrace{\oplus, \otimes}_{D1.1.7}$,

$\underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)}$: $a \oplus 1 = 1 \oplus a$

Vermutung: K_4 ist ein Körper;

Überprüfung:

$1 \oplus 1 = 0$ da: $1 \oplus 1 \underbrace{\neq}_{1 \oplus 0 = 1} 1$, $1 \oplus 1 \neq a \oplus 1$, $1 \oplus 1 \neq a$, sonst wäre $K_4 = Z_{/4}$

//**D1.1.7**(307)

//(KD$\oplus\otimes$) Distributivgesetz für $\oplus$ und $\otimes$: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

$a \oplus a \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)} a \otimes (1 \oplus 1) = a \otimes 0 = 0$, $(a \oplus 1) \oplus (a \oplus 1) \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)}$

$(a \oplus 1) \otimes (1 \oplus 1) = (a \oplus 1) \otimes 0 = 0$,

//**D1.1.7**(307)

//(K1$\oplus$) Assoziativgesetz für Assoziativgesetz für $\oplus$:

// $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \ \forall\ a,b,c \in K$,

// (K4$\oplus$) Kommutativgesetz bzgl $\oplus$: $a \oplus b = b \oplus a \ \forall\ a,b \in K$

$(a \oplus 1) \oplus 1 \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} a \oplus (1 \oplus 1) = a \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\oplus)} 1 \oplus (a \oplus 1)$, $(a \oplus 1) \oplus a \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\oplus, K1\oplus)}$

$(a \oplus a) \oplus 1 = 1$

$= a \oplus (a \oplus 1)$

$\oplus$	0	1	a	$a \oplus 1$
0	0	1	a	$a \oplus 1$
1	1	0	$a \oplus 1$	a
a	a	$a \oplus 1$	0	1
$a \oplus 1$	$a \oplus 1$	a	1	0

0 ist Nullelement

jedes Element hat genau 1 Inverses

Assoziativgesetz gilt

$a \otimes (a \oplus 1) \neq 0$, da sonst $a = 0$ oder $a \oplus 1 = 0$

$a \otimes (a \oplus 1) \neq a$, da sonst $(a \oplus 1) = 1$

$a \otimes (a \oplus 1) \neq a \oplus 1$, da sonst $a = 1$

$\Rightarrow$

$a \otimes (a \oplus 1) = 1$ Analog $(a \oplus 1) \otimes a = 1$

$a \otimes a = 1 \oplus a = a \oplus 1$ da

$(\underbrace{(a \oplus 1) \otimes a}_{=1}) \oplus a = (a \otimes a) \oplus (1 \otimes a) \oplus a = (a \otimes a) \oplus (1 \otimes a \oplus a) =$

$(a \otimes a) \oplus (a \oplus a) = (a \otimes a) \oplus 0 = 1 \oplus a$ (siehe $\oplus$ Verknüpfung)

und

$(a \oplus 1) \otimes (a \oplus 1) = ((a \oplus 1) \otimes a) \oplus (1 \otimes (a \oplus 1)) = ((a \oplus 1) \otimes a) \oplus (a \oplus 1) = 1 \oplus a \oplus 1 =$

$1 \oplus 1 \oplus a = 0 \oplus a = a$

$\otimes$	0	1	a	$a \oplus 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	a	$a \oplus 1$
a	0	a	$a \oplus 1$	1

Jedes Element $\neq 0 \in K_4$ hat 1 multiplikatives

Inverses (in jeder Zeile 1x die 1)

Assoziativ- und Distributivgesetz

a⊕1 0 a⊕1 1 a nachzurechnen.

A1.1.1 Zeige:

a) $\forall\ a\in K: a\otimes 0=0$

//Konventionen: $a\otimes b\oplus c\otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $\quad a-b:= a\oplus(-b)$

// $-a-b:=(-a)\oplus(-b)$ $\quad \frac{a}{b} := a/b := a:b := a\otimes b^{-1}, b\neq 0$

// b^{-1}:= inverses Element von b

Lös: Verwendung von - siehe Konventionen.

Sei $b=a\otimes 0$ gesetzt, b=0?

$b=a\otimes(0\oplus 0)=(a\otimes 0)\oplus(a\otimes 0)=b\oplus b \Rightarrow$

$0=b-b=((b\oplus b)-b=b\oplus(b-b)=b\oplus 0=b$

//D1.1.7(307)

//(K1⊕) Assoziativgesetz für Assoziativgesetz für ⊕:

// $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c)\ \forall\ a,b,c\in K$,

//(K2⊕) Existenz des ⊕ neutralen Elements bzgl ⊕:

// $\exists$ genau ein Element $0\in K$ mit $a\oplus 0= a\ \forall\ a\in K$

//(K3⊕) Existenz eines Inverselements bzgl ⊕:

// $\forall\ a\in K\ \exists$ genau ein $-a\in K$ mit $a\oplus(-a)=0$

//(K3⊗) Existenz des bzgl ⊗ inversen Elements

// $\forall\ a\in K\setminus\{0\}, \exists$ genau ein Element $a^{-1}\in K$ mit $a\otimes a^{-1}=1$

//(K4⊗) Kommutativgesetz bzgl ⊗: $a\otimes b=b\otimes a\ \forall\ a,b\in K$

//(KD⊕⊗) Distributivgesetz für ⊕ und ⊗: $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

b) Das additive Inverse $-a$ zu einem $a\in K$ ist eindeutig bestimmt und es gilt $-a=(-1)\otimes a$, wobei -1 das additive Inverse der Zahl 1 bedeutet.

Lös: Gelte $a\oplus b=0$ und $a\oplus c=0$.

$b \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\oplus)} b\oplus 0=b\oplus(a\oplus c) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} (b\oplus a)\oplus c= \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} (a\oplus b)\oplus c=0\oplus c=c$,

also b=c.

$a+(-1)\otimes a \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)(KD\oplus\otimes)} a\otimes(1\oplus(-1))=a\otimes 0 \underbrace{\Rightarrow}_{a)} a\otimes 0=0 \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\otimes)}$

$(-1)\otimes a$ additives Inverses zu a.

//D1.1.7(307)

//(K1⊗) Assoziativgesetz für ⊗: $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c\ \ \forall\ a,b,c\in K$

//(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:

// $\exists$ genau ein Element $1\in K$ mit $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a\ \forall\ a\in K$

//(K4⊗) Kommutativgesetz bzgl ⊗: $a\otimes b=b\otimes a\ \forall\ a,b\in K$

c) Das multiplikative Inverse a^{-1} zu einem $a\in K\setminus\{0\}$ ist eindeutig bestimmt

Lös:Ann a⊗b=1=a⊗c ⇒ c $\underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)}$ c⊗(a⊗b) $\underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)}$ (c⊗a)⊗b $\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$ (a⊗c)⊗b= 1⊗b $\underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)}$ b ⇒ Beh

A1.1.2
Es sei K ein Körper und a,b∈K. Zeige die Binomische $\underbrace{=}_{(D)}$ Formel $(a\oplus b)^2 = a^2\oplus 2\otimes a\otimes b\oplus b^2$ nur mit Hilfe der Körperaxiome.
Hierbei ist 2: = 1⊕1 und $x^2 = x\otimes x$ für x∈K

*//**D1.1.7**(307)*
//(K1⊕) (a⊕b)⊕c= a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K,
//(K1⊗) a⊗(b⊗c)=(a⊗b)⊗c ∀ a,b,c∈K
//(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:
// ∃ genau ein Element 1∈K mit 1≠0 und a⊗ 1=a ∀ a∈K
// ∀ a∈K\{0},∃ genau ein Element a^{-1}∈K mit a⊗a^{-1}=1
//(K4⊗) a⊗b=b⊗a ∀ a,b∈K
//(KD⊗⊕) a⊗(b⊕c)=(a⊗b)⊕(a⊗c)

Bew: $(a\oplus b)^2=(a\oplus b)\otimes(a\oplus b)$ $\underbrace{=}_{D1.1.7(KD\otimes\oplus)}$ (a⊕b)⊗a ⊕ (a⊕b)⊗b $\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$
a⊗(a⊕b) ⊕ b⊗(a⊕b) $\underbrace{=}_{D1.1.7(KD\otimes\oplus)}$ (a⊗a⊕a⊗b) ⊕ (b⊗a ⊕ b⊗b) $\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$
$(a^2\oplus a\otimes b) \oplus (a\otimes b \oplus b^2)$ $\underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)mehrmls}$ $a^2\oplus(a\otimes b\oplus a\otimes b)\oplus b^2$ $\underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)}$
$(a^2 \oplus(1\otimes(a\otimes b)) \oplus (1\otimes(a\otimes b))\oplus b^2$ $\underbrace{=}_{D1.1.7(KD\otimes\oplus)}$

$(a^2\oplus(a\otimes b)\otimes(1\oplus 1))\oplus b^2$ $\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$ $(a^2\oplus 2\otimes(a\otimes b))\oplus b^2=a^2\oplus 2\otimes a\otimes b \oplus b^2$
Klammern können wegen (K1⊕) und (K1⊗) weggelassen werden

A1.1.3 Gegeben sei ein Körper (K,+,*). Setze man 2:=1+1. Zeige:
Definiert man auf (K) Abbildungen ⊕ und ⊗ durch:
a⊕b=a+b+2, a⊗b:=2a+2b+a*b+2, so erhält man einen Körper K*
mit Addition ⊕ und Multiplikation ⊗
Lös:Definiere 4:=2+2=2*2=2*(1+1)=2*1+2*1=4
Überprüfung der Körperaxiome für ⊕ und ⊗
(K1⊕)Für a,b,c∈K gilt (a⊕b)⊕c=(a+b+2)⊕c=a+b+2+c+2=a+b+c+4=
a+(b+c+4)=a+(b⊕c)+2=a⊕(b⊕c)

(K2⊕) Für $a \in K$ gilt $a \oplus \mathbf{0} = a \Leftrightarrow a + \mathbf{0} + 2 = a \Leftrightarrow \mathbf{0} + 2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{0} = -2$ d.h. $\mathbf{0} = -2$ ist eindeutiges neutrales Element bzgl a.

(K3⊕) Es sei $a \in K$. Dann gilt $\Leftrightarrow a \oplus (-a) = \mathbf{0} \Leftrightarrow a + (-a) + 2 = -2 \Leftrightarrow (-a) = -a-4$, d.h. $-a-4$ ist das eindeutige additive Inverse zu a bzgl ⊕

(K4⊕) Für $a \in K$ gilt: $a \oplus b = a+b+2 = b+a+2 = b \oplus a$

(K1⊗) Für $a,b,c \in K$ gilt:

- $a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (2b+2c+bc+2) =$
  $2a+2(2b+2c+bc+2)+a(2b+2c+bc+2)+2 =$
  $2a+4b+4c+2bc+4+2ab+2ac+abc+2a+2 =$
  $6+4a+4b+4c+2ab+2ac+2bc+abc$
- $(a \otimes b) \otimes c = (2a+2b+ab+2) \otimes c =$
  $2(2a+2b+ab+2)+2c+(2a+2b+ab+2)c+2 =$
  $4a+4b+2ab+4+2c+2ac+2bc+abc+2c+2 =$
  $6+4a+4b+4c+2ab+2ac+2bc+abc$
  $\Rightarrow$
- $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

(K2⊗) $\forall\ a \neq \mathbf{0} = -2$ gilt $a \otimes \mathbf{1} = a \Leftrightarrow 2a + 2 * \mathbf{1} + a * \mathbf{1} + 2 = a \Leftrightarrow a + 2 * \mathbf{1} + a * \mathbf{1} + 2 = 0 \Leftrightarrow (a+2)(\mathbf{1}+1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}+1=0 \Leftrightarrow \mathbf{1} = -1$
d.h., $\mathbf{1} = -1$ ist das eindeutige Einselement bzgl ⊗
(Beachte $\mathbf{0} \otimes \mathbf{1} = (-2) \otimes (-1) = 2(-2) + 2(-1) + 2 + 2 = -2 = \mathbf{1}$)

(K3⊗) $\forall\ a \neq \mathbf{0}$ gilt $a \otimes a^{-1} = \mathbf{1} \Leftrightarrow 2a + 2a^{-1} + a a^{-1} + 2 = -1 \Leftrightarrow$

$$a^{-1}(a+2) = -1-2-2a \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} = \frac{-1-2-2a}{a+2} \text{ d.h. } \frac{-3-2a}{a+2}$$

ist das eindeutige Inverse zu $a \neq \mathbf{0}$ bzgl ⊗

(K4⊗) Für $a,b \in K$ gilt: $a \otimes b = 2a+2b+ab+2 = 2b+2a+ba+2 = b \otimes a$

(KD⊕⊗) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes (b+c+2) = 2a+2(b+c+2)+a(b+c+2)+2 =$
$2a+2b+2c+4+ab+ac+2a+2$ und
$(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = (2a+2b+ab+2) \oplus (2a+2c+ac+2) =$
$2a+2b+ab+2+2a+2c+ac+2+2$ d.h.
$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Facit: $(K, \oplus, \otimes)$ ist Körper

(314)**Abgeleitete Rechenregeln (RR) in** K :
Sei K ein Körper. Dann gilt ∀ a,b,c
1.) $0 \neq 1$
Bew: 1= neutrales Element von $K^{\otimes}=K\setminus\{0\} \Rightarrow 1 \neq 0$
$a\otimes 1=a$, $a\otimes 0=0$
2.) $a\oplus 0=0\oplus a=a$, $a\oplus(-a)=(-a)\oplus a=0 \quad \forall\, a\in K$
$a\otimes 1=1\otimes a=a \ \forall\, a\in K$, $a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a \ \forall\, a\neq 0$
Bew: folgt aus Kommutativgesetzen (K4⊕),(K4⊗)
3.) ∀ a,b∈K ∃ genau ein x∈K: $a\oplus x=b$ mit $x=b\oplus(-a)$
Bew:Sei x eine Lösung von $a\oplus x=b \Rightarrow$
$(-a)\oplus(a\oplus x)=(-a)\oplus b=b\oplus(-a) \Rightarrow ((-a)\oplus a)\oplus x=b\oplus(-a) \Rightarrow 0\oplus x=b\oplus(-a)\Rightarrow$
$x=b\oplus(-a)$, $b\oplus(-a)$ ist eine Lösung, Probe:
$a\oplus(b\oplus(-a))=(b\oplus(-a))\oplus a=b\oplus((-a))\oplus a)=b\oplus 0=b$

4.) (.) $-(-a)=a$, $-0=0$
// (K3⊕) ∀ a∈K ∃ genau ein -a∈K mit $a\oplus(-a)=0$
// (K4⊕) $a\oplus b = b\oplus a$ ∀ a,b∈K

Bew: $a\oplus(-a) \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} 0$, $(-a)\oplus(-(-a)) \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} 0$ und
$\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\oplus)} (-a)\oplus a = 0$
d.h. $-(-a)$ ist Lösung von $(-a)\oplus x=0 \Rightarrow$
$a=-(-a)$ (=x)
speziell $-0=0$
Bew: $0+(-0) \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} 0$. Annahme $(-0)=a\neq 0 \Rightarrow 0+a=a \Rightarrow$
$0+(-0)=a$ Widerspruch zu $0+(-0) \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} 0$.

(..) $-(a\oplus b)=-a-b$
Bew: $-(a\oplus b)$ Lösung von $(a\oplus b)\oplus x=0$ und
$(a\oplus b)\oplus(-a-b)=(a\oplus b)\oplus((-a)\oplus(-b)) \underset{(A4)}{\Rightarrow}$
$(a\oplus b)\oplus((-b)\oplus(-a))=a\oplus((b\oplus(-b)))\oplus(-a)=a\oplus(0\oplus(-a))=a\oplus(-a)$
$\underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} 0$
$-a-b$ ist auch Lösung der Gleichung $(a\oplus b)\oplus x=0$
$\underset{2.)}{\Rightarrow} -(a\oplus b)=(-a)\oplus(-b)=-a-b$

4.) ∀ a,b∈K, a≠0. ∃ genau ein x∈K: $a\otimes x=b$
nämlich $x=a^{-1}\otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)} =b\otimes a^{-1} \underset{\text{Konvention}}{=} b/a$
//D1.1.1 (300) (K1⊗) $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$ ∀ a,b,c∈K //
//(M2) $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a$ ∀ a∈K (M3) ∀ a∈K\{0}, $a^{-1}\in K$, $a\otimes a^{-1}=1$//
//(M4) $a\otimes b=b\otimes a$ ∀ a,b∈K//
Bew:folgt analog zu 2.) und 3.) aus den Axiomen (K1⊗)...(K4⊗)

5.) $(a^{-1})^{-1}=a$, $(a\otimes b)^{-1}=a^{-1}\otimes b^{-1}$ ∀ a,b∈K, a,b≠0
Bew:folgt analog zu 2.) und 3.) aus den Axiomen (K1⊗)...(K4⊗)
6.) $a\otimes b=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$. Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0$ ∀ a≠0
//**D1.1.7**
//(KD⊕⊗) (300) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//
//(K1⊗) $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$ ∀ a,b,c∈K

//(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:
// *∃ genau ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a \quad \forall a \in K$*
//(K3⊗) Existenz des bzgl ⊗ inversen Elements
// $\forall a \in K \setminus \{0\}, \exists$ genau ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a \otimes a^{-1} = 1$

Bew: "⇐„1.) $a=0 \Rightarrow a \otimes b = 0 \otimes b = (0 \oplus 0) \otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)} 0 \otimes b \oplus 0 \otimes b$ d.h.

$0 \otimes b$ ist Lösung x von $0 \otimes b \oplus x = 0 \otimes b$.

Da $0 \otimes b \oplus 0 = 0 \otimes b \underset{2.)}{\Rightarrow} x = 0 \otimes b = 0$

2.) $b=0 \Rightarrow a \otimes b = a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0 \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)}$

„⇒„ Annahme $b \neq 0 \Rightarrow \exists\ b^{-1}$ mit $b \otimes b^{-1} = 1$

$\Rightarrow (a \otimes b) \otimes b^{-1} = 0 \otimes b^{-1} \Rightarrow (a \otimes b) \otimes b^{-1} \underbrace{=}_{\Leftarrow} 0 \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)} a \otimes (b \otimes b \otimes^{-1}) = 0 \Rightarrow$

$a \otimes 1 \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)} 0 \Rightarrow a = 0$

Zu Speziell: $\underbrace{a}_{\neq 0} \otimes a^{-1} \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\otimes)} 1 \underset{(6.)}{\Rightarrow} a^{-1} \neq 0$ sonst nach 6.) $a \otimes a^{-1} = 0$

7.)● $(-1) \otimes a = -a$, ●● $-(a \otimes b) = (-a) \otimes b = a \otimes (-b)$

//**D1.1.7** (307)
//(K3⊕) *$a \oplus (-a) = 0$*
//(K1⊗) *$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c \quad \forall a,b,c \in K$ (M2) $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a \quad \forall a \in K$*
//(K2⊗) *∃ genau ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a \quad \forall a \in K$*
// *(K4⊗) $a \otimes b = b \otimes a \quad \forall a,b \in K$ (D) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ //*

Bew:● $a \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)} a \otimes 1 \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)} 1 \otimes a$, $a \oplus (-1) \otimes a = 1 \otimes a \oplus (-1) \otimes a \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)}$

$(1 \oplus (-1)) \otimes a \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} 0 \otimes a \underset{6.)}{=} 0 \Rightarrow a \oplus (-1 \otimes a) = 0$,

$a \oplus x = 0$ hat die Lösung $(-1) \otimes a \Rightarrow (-1) \otimes a = -a$

●● $-(a \otimes b) \underset{\text{wie oben}}{=} (-1) \otimes (a \otimes b) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)} ((-1) \otimes a) \otimes b = (-a) \otimes b$

$\underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)} a \otimes ((-1) \otimes b) = a \otimes (-b)$

8.)● $a \otimes (b \oplus (-c)) = a \otimes b \oplus (-a \otimes c)$, ●●$a \otimes c = a \otimes b$, $a \neq 0 \Rightarrow c = b$

Bew: ● $a \otimes (b \oplus (-c)) = a \otimes b \oplus a \otimes (-c) = a \otimes b \oplus (-(a \otimes c))$

●● Es gelte $a \otimes b = a \otimes c \Rightarrow a \otimes b \oplus (-a \otimes c) = 0 \Rightarrow a \otimes (b \oplus (-c)) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{6.)} \left.\begin{matrix} a=0 \text{ oder} \\ b-c=0 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow b \oplus (-c) = 0 \Rightarrow c = b$

9) $(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$

Bew: $(-a) \otimes (-b) \underset{7.)}{=} ((-1) \otimes a) \otimes ((-1) \otimes b) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)(K4\otimes)} (-1) \otimes (-1) \otimes (a \otimes b))$

$\underset{7.)}{=} (-1) \otimes (-(a \otimes b)) = -(-(a \otimes b)) \underset{3.)}{=} = a \otimes b$

//Konventionen: $a\otimes b\oplus c\otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $\quad a-b := a\oplus(-b)$

// $\quad -a-b := (-a)\oplus(-b) \quad \frac{a}{b} := a/b := a:b := a\otimes b^{-1}, b\neq 0$

// $\quad b^{-1}$:= inverses Element von b

10.) $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d} = \frac{a\otimes d\oplus c\otimes d}{b\otimes d} \quad \forall\ a,b,c,d\in K,\ b,d\neq 0$

Bew: $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d} = a\otimes b^{-1}\oplus c\otimes d^{-1} = a\otimes d\otimes d^{-1}\otimes b^{-1}\oplus c\otimes b\otimes b^{-1}\otimes d^{-1} =$

$a\otimes d\otimes b^{-1}\otimes d^{-1}\oplus c\otimes b\otimes b^{-1}\otimes d^{-1} \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\oplus\otimes)} (a\otimes d\oplus b\otimes c)\otimes(b^{-1}\otimes d^{-1}) =$

$(a\otimes d\oplus b\otimes c)\otimes(b\otimes d)^{-1} = \frac{a\otimes d\oplus c\otimes d}{b\otimes d},\ b,d\neq 0$

$\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d} = \frac{a\otimes c}{b\otimes d}$ folgt aus (K4⊗) $b,d\neq 0$

Bew: Z.z $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$

$(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ab^{-1})(cd^{-1})\underbrace{(bd)(bd)^{-1}}_{=1} = a\underbrace{b^{-1}b}_{=1}\ c\underbrace{d^{-1}d}_{=1}(bd)^{-1} = (ac)(bd)^{-1}$

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a\otimes d}{b\otimes c} \quad b,d,c\neq 0$

Beim Rechnen in Körpern nach D1.1.8 (z.B. in R) wird in obigen RR meist + statt ⊕ und *,x...statt ⊗ verwendet. *,x… wird häfig weggelassen, wenn e sich aus dem Zusammenhang ergibt.

A1.1.4 Wie sieht es mit der Lösungsmenge zu RR4 für a=0 aus?

//4.) $\forall\ a,b\in K,\ a\neq 0.\ \exists$ genau ein $x\in K$: $a\otimes x=b$

// nämlich $x=a^{-1}\otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)} = b\otimes a^{-1} \underset{\text{Konvention}}{=} b/a$

A1.1.5 Zeige, dass $(-1)^2=(-1)*(-1)=1$ $(-a)^2=a^2$ gilt.

A1.1.6 Seien a,b,c,d Elemente eines Körpers. Zeige

a) $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ $(a,c\neq 0)$

// (K3⊗) $\forall\ a\in K\backslash\{0\}, \exists$ genau ein Element $a^{-1}\in K$ mit $a\otimes a^{-1}=1$

Lös: $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ab^{-1})(cd^{-1})\underbrace{(bd)(bd)^{-1}}_{=1} = a\underbrace{b^{-1}b}_{=1}\ c\underbrace{d^{-1}d}_{=1}(bd)^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$.

b) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$ $(b,c,d\neq 0)$

A1.1.7

- Es sei $(K,\oplus,\otimes)$ ein Körper mit der Eigenschaft $x^2+y^2\neq 0 \;\forall\; (x,y)\neq(0,0)$.

●● Auf $K\text{x}K$ seien folgende Verknüpfungen definiert:

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2) := (x_1 y_1-x_2y_2,\; x_1y_2+x_2y_1)$

Zeige, dass $(K\text{x}K,\oplus,\otimes)$ ein Körper ist

Verständnis K, ist ein Körper mit Eigenschaft ●

$K\text{x}K$, ist ein Körper, sofern Verknüpfungen $\oplus,\otimes$ gelten,

das ist so wie unter Bew ausgeführt. .

Bem: Wählt man $K=R$ (hier gilt: $x^2+y^2>0 \;\forall\; (x,y)\neq(0,0)$), so erhält man hiermit, dass $C= R\text{x}R$ ein Körper ist.

Bew: Prüfe alle Körperaxiome nach **D1.1.7**:

$\oplus$ und $\otimes$ sind Abb. $(K\text{x}K)\text{x}(K\text{x}K)\to K\text{x}K$

(Abgeschlossenheit bzgl $\oplus$ und $\otimes$, denn

$x_1+y_1, x_2+y_2, x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1 \in K \;\forall\; (x_1x_2),(y_1,y_2)\in K\text{x}K$)

d.h. $\underbrace{(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)}_{(KxK)x(KxK)} := (x_1+y_1, x_2+y_2)\in K\text{x}K$

$\underbrace{(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2)}_{(KxK)x(KxK)} := (x_1y_1-x_2y_2,\; x_1y_2+x_2y_1)\in K\text{x}K$

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\text{x}K$ bel $\Rightarrow$

Zu zeigen, damit (K1⊕) gilt

$((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2)=(a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2))$:

// *(K1⊕) $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c) \;\forall\; a,b,c\in K$*

$((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+b_1, a_2+b_2)\oplus(c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$

$((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2)=((a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2)) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$

$(a_1,a_2)\oplus(b_1+c_1, b_2+c_2)= \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2))$

$\Rightarrow$ (K1⊕) gilt

Zu zeigen, damit (K2⊕) gilt: Existenz der Null gemäß (A2)

//***D1.1.7*** *(307) (A2) $a\oplus 0=a \;\forall\; a\in K$//*

// *Bem:2.) Eindeutigkeit 0: $a\oplus 0=a$, $a\oplus\bar{0}=a$ …. $\bar{0}=\bar{0}\oplus 0=0\oplus\bar{0}=0$//*

Für $(a_1,a_2)\in K\text{x}K$ bel gilt: $(a_1,a_2)+(0,0) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+0, a_2+0)=(a_1,a_2)$

$\Rightarrow \exists\; 0=(0,0): K\text{x}K=(a_1,a_2)\oplus(0,0)=(a_1,a_2)$ &

Die Eindeutigkeit der Null folgt aus D1.1.8 Bem 2 $\Rightarrow$

(K2⊕) gilt

Zu zeigen, damit (K3⊕) gilt

Existenz des inversen Elements bzgl $\oplus$:

//(K3⊕) Existenz eines Inverselements bzgl $\oplus$:

// $\forall\ a\in K\ \exists$ genau ein $-a\in K$ mit $a\oplus(-a)=0$

Sei $(a_1,a_2),(-a_1,-a_2)\in K\times K$ bel

$$(a_1,a_2)\oplus(-a_1,-a_2)\underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}(a_1+(-a_1),a_2+(-a_2))\underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)}(0,0)\Rightarrow$$

$(\underbrace{-a_1}_{\in K},\underbrace{-a_2}_{\in K})\in K\times K$ ist additiv inverses Element von (a_1,a_2)

(insbesondere existiert dieses inverse Element in $K\times K$)

Die Eindeutigkeit des Inversen Element bzgl $\oplus$ folgt aus D1.1.1 Bem 3

$\Rightarrow$ (K3$\oplus$) gilt

Zu zeigen, damit (K4$\oplus$) gilt

$(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(b_1,b_2)\oplus(a_1,a_2)$

//**D1.1.7** *(307)* (K4$\oplus$) $a\oplus b=b\oplus a\ \forall\ a,b\in K$ //

Seien Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)$

$$\underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}(a_1+b_1,a_2+b_2)\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\oplus)RR}(b_1+a_1,b_2+a_2)\underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}(b_1,b_2)\oplus(a_1,a_2)$$

$\Rightarrow$(K4$\oplus$) gilt

Zu zeigen, damit (K1$\otimes$) gilt

$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\otimes(c_1,c_2)=(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\otimes(c_1,c_2))$

//**D1.1.7** *(307)* *(M1)* $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c\quad\forall\ a,b,c\in K$//

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$

$$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\otimes(c_1,c_2)\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$$

$$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)\otimes(c_1,c_2)\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$$

$$(a_1b_1-a_2b_2)c_1-(a_1b_2+a_2b_1)c_2,(a_1b_1-a_2b_2)c_2+(a_1b_2+a_2b_1)c_1$$

$$\underbrace{=}_{K\ \text{Axiome, Rechenr.}}a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2,a_1b_1c_2-a_2b_2c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1=$$

$$(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1),a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1-b_2c_2)$$

$$\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}(a_1,a_2)\otimes(b_1c_1-b_2c_2,b_1c_2+b_2c_1)\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$$

$$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\otimes(c_1,c_2))$$

$\Rightarrow$ (K1$\otimes$) gilt

Zu zeigen, damit (K2$\otimes$) gilt

$\exists\ 1=(x,y)\in(K\times K):\ (a_1,a_2)\otimes1=(a_1,a_2)$

//**D1.1.7** *(307)* *(K2$\otimes$)* $1\neq0$ *und* $a\otimes1=a\ \forall\ a\in K$//

//*4.) in (K2$\otimes$) Eindeutigkeit 1 mit (K4$\otimes$)*//

//*RR in K 6.)* $a\otimes b=0\Leftrightarrow a=0$ *oder* $b=0$ *Speziell* $\Rightarrow a^{-1}\neq0\ \forall\ a\neq0\ \forall\ a\neq0$//

$$(a_1,a_2)\otimes(x,y)\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}(\underbrace{a_1\cdot\underbrace{x}_{1}}_{=a_1}-\underbrace{a_2\cdot\underbrace{y}_{0}}_{=0},\underbrace{a_1\cdot\underbrace{y}_{0}}_{=0}+\underbrace{a_2\cdot\underbrace{x}_{1}}_{=a_2})\underbrace{=}_{1=(x,y)=(1,0)}=(a_1-0,0+a_2)\underbrace{=}_{\text{Rechenr}\ in K}$$

(a_1,a_2) & Die Eindeutigkeit der Eins folgt aus Bem4 D1.1.1 $\Rightarrow$ $1=(1,0)$

$\Rightarrow$ (K2$\otimes$) gilt

Zu zeigen, damit (K3$\otimes$) gilt

$\forall\ a_1,a_2\in K\setminus\{0\}\ \exists\ (a_1^{-1},a_2^{-1})\in K\setminus\{0,0\}:\ (a_1,a_2)\otimes(a_1^{-1},a_2^{-1})=1=(1,0)$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2):=(x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

Ansatz: $(a_1,a_2)\otimes(a_1^{-1},a_2^{-1})=(1,0)\Leftrightarrow(a_1a_1^{-1}-a_2a_2^{-1}=1,a_1a_2^{-1}+a_2a_1^{-1}=0)$

$$a_2^{-1} \underbrace{=}_{RR} \frac{-a_2 a_1^{-1}}{a_1} \Leftrightarrow a_1(a_1^{-1}) - a_2\left(\frac{-a_2 a_1^{-1}}{a_1}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$a_1^{-1}\left(a_1 - a_2\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow a_1^{-1}\left(a_1 + \frac{a_2^2}{a_1}\right) = 1 \Leftrightarrow a_1^{-1}\,\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1} = 1 \Leftrightarrow$$

$a_1^{-1} = a_1/(a_1^2+a_1^2)$ entsprechend

$a_2^{-1} = -a_2/(a_1^2+a_1^2)$.

Die Eindeutigkeit des multiplikativen inversen **D1.1.8** Bem 4

$\Rightarrow (a_1,a_2) \otimes (a_1/(a_1^2+a_1^2), -a_2/(a_1^2+a_1^2)) = 1 = (1,0)$

$\Rightarrow$ (K3⊗) gilt

Zu zeigen, damit (K4⊗) gilt

$(a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) = (b_1,b_2) \otimes (a_1,a_2)$

//(300) (M4) $a \otimes b = b \otimes a \quad \forall\, a,b \in K$//

$(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in K\text{x}K$ bel: $(a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$(a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \underbrace{=}_{(RR)} (b_1a_1 - b_2a_2, b_1a_2 + b_2a_1) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$(b_1,b_2) \otimes (a_1,a_2)$

$\Rightarrow$ (K4⊗) gilt

Zu zeigen, damit (KD⊕⊗) gilt

$(a_1,a_2) \otimes ((b_1,b_2) \oplus (c_1,c_2)) = ((a_1,a_2) \otimes ((b_1,b_2)) \oplus ((a_1,a_2) \otimes (c_1,c_2))$

//(307) (D) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$//

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2) \in K\text{x}K$ bel $\Rightarrow$

$(a_1,a_2) \otimes ((b_1,b_2) \oplus (c_1,c_2)) \underbrace{=}_{\text{Def} \oplus} (a_1,a_2) \otimes (b_1+c_1, b_2+c_2) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$((a_1(b_1+c_1) - (a_2(b_2+c_2), a_1(b_2+c_2) + a_2(b_1+ c_1)) =$

Rechenr., Axiome, insbes (D) in K

$(a_1b_1 + a_1c_1 - a_2b_2 - a_2c_2, a_1b_2 + a_1c_2 + a_2b_1 + a_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Rechenr in} K}$

$((a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1c_1 - a_2c_2), (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1c_2 + a_2c_1)) \underbrace{=}_{\text{Def} \oplus}$

$(a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \oplus (a_1c_1 - a_2c_2, a_1c_2 + a_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$((a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2)) \oplus ((a_1,a_2) \otimes (c_1,c_2))$

beachte: ⊗ bindet stärker als ⊕ (Punkt vor Strich)

(KD⊕⊗) gilt

Bem: Wählt man K=R, (hier gilt: $x^2+y^2>0 \;\; \forall (x,y) \neq (0,0)$), so erhält man hiermit, dass C= RxR ein Körper ist.

In C= RxR schreibt man anstelle von (x_1,x_2): $x+iy$ wobei $i=(0,1)$

Anstelle von ⊕ und ⊗ benutzt man die Symbole + und *, also

$(x_1+ix_2)+(y_1+iy_2) := (x_1+y_1)+i(x_2+y_2)$

$(x_1+ix_2)\cdot(y_1+iy_2) := (x_1y_1-x_2y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

Nach **A1.1.7** ist (C,+,*) also ein Körper, d.h. man kann wie gewohnt rechnen. Beachte noch:

$i=(0,1)\quad i^2=i*i=(0+1*i)*(0+1*i) \underbrace{=}_{\text{Def von }\cdot} (0\cdot 0-1*1)+(0*1+1*0)i=$

$-1+0*i=-1 \quad$ also $i^2=-1$

$i^2=(0,1)*(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$

//**D1.1.4** (302)Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung $\circ$
// (z.B +, * usw)
// $G\circ G\to G,\ (a,b)\to a\circ b$,
// sodass folgende Axiome $\forall\ a,b,c\in G$ erfüllt sind:
// a) Assoziativgesetz $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ # (K1⊗) in Körper K
// b) ∃ neutrales Element $e\in G,\ a\circ e=a$ # (K2⊗) in Körper K
// c) $\forall\ a\in G\ \exists$ Inverses Element $a'\in G$: $a\circ a'=e$ # (K3⊗) in Körper K
//Bem:Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G
//**L1.1.1** (303)Sei G Gruppe
// b) Es gilt $e\circ a=a\circ e=a\ \forall\ a\in G$
// d) Es gilt $a'\circ a=e$ (nicht nur $a\circ a'=e$)
//siehe **A0.2.20**
//Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f:X\to Y$ eine Abbildung. Zeige:
//c)f bijektiv ⇔ ∃ $g:Y\to X$ mit $g\circ f=id_X \wedge f\circ g=id_Y$.
// Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

A1.1.8 Es sei $(G,\circ)$ eine Gruppe und $a\in G$ (fest).
Beweise, dass die folgenden Abbildungen bijektiv sind, und gib jeweils die zugehörigen Umkehrabbildungen an.

Bem:Wir zeigen die Bijektivität von f mit Angabe eines $g:G\to G$ mit
$g\circ f=id_G=f\circ g$
Dann ist $f^{-1}=g$

a) $f:G\to G,\ x\to x^{-1}$ (x^{-1} sei das inverse Element zu x in der Gruppe G)

Lös: $y=x^{-1} \Leftrightarrow x=y^{-1};\quad f(x):=x^{-1}$

Sei $g:=f \Rightarrow (g\circ f)(x) \underset{f=g}{=} (f\circ f)(x)=f(f(x)=f(x^{-1})=(x^{-1})^{-1}=x\ \forall\ x\in G \Rightarrow$

$g\circ f=id_G$ und

$f\circ g \underset{f=g}{=} g\circ f=id_G \underset{A0.2.20\ c)}{\Rightarrow}$ f bijektiv und $f^{-1}=f(=g)$

b) $f:G\to G,\ x\to a\circ x$

Lös: a^{-1} sei das inverse Element zu a in der Gruppe G

$y=a\circ x \Leftrightarrow a^{-1}\circ y=a^{-1}\circ(a\circ x) \Leftrightarrow a^{-1}\circ y=(a^{-1}\circ a)\circ x \Leftrightarrow a^{-1}\circ y=e\circ x \Leftrightarrow x=a^{-1}\circ y$

Geg.: $x\to a\circ x$ d.h. $\quad f(x):=a\circ x$.

Definiere $g: G\to G \quad g(x):=a^{-1}\circ x \Rightarrow$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(a\circ x)=a^{-1}\circ(a\circ x) \underbrace{=}_{D1.1.3\ a)} (a^{-1}\circ a)\circ x \underbrace{=}_{L1.1.\ d)} =e\circ x \underbrace{=}_{L1.1.1\ b)} x\circ e$

$=x\ \forall\ x\in G$ und

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(a^{-1}\circ x)=a\circ(a^{-1}\circ x)=(a\circ a^{-1})\circ x=e\circ x \underbrace{=}_{L1.1.1\ b)} x\circ e=x \Rightarrow$

$g\circ f=id_G=f\circ g$, deshalb $f^{-1}=g \Rightarrow$ f bijektiv

c) $f:G\to G,\ x\to x\circ a$

Lös: $\quad f(x)= x\circ a$

Definiere $g:G\to G,\ g(x)= x\circ a^{-1} \Rightarrow$ analog a),b)

$(g\circ f)(x)=g(f)(x)=g(x\circ a)=(x\circ a)\circ a^{-1}=x\circ(a\circ a^{-1})=x\circ 1=x\ \forall\ x\in G$ und

$(f\circ g)(x)=(f(g))(x)=f(x\circ a^{-1})=x\circ(a^{-1}\circ a)=x\circ 1=x\ \forall\ x\in G$

$\Rightarrow g\circ f=id_G=f\circ g \Rightarrow$ f bijektiv $\forall\ f^{-1}=g$

A1.1.9 Es sei K ein Körper und $a\in K$ (fest). Auf K seien die Relationen | und ~ wie folgt definiert:

$x|y: \Leftrightarrow \exists\ c\in K$ mit $y=c*x$

$x \sim y :\Leftrightarrow a|(x-y)$

a) Ist die Relation | reflexiv, symmetrisch, transitiv?

Lös: 1. Möglichkeit

//(RR) in K (304) 1.)…. $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a \ \forall\, a \in K$ ….//

//6.) $a \otimes b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$, Speziell $\Rightarrow a^{-1} \neq 0 \ \forall\, a \neq 0$//

(.) | ist reflexiv: $x|x \ \forall\, x \in K$,

denn $x \underset{\text{RR 1.)}}{=} 1*x \ \forall\, x \in K$ (d.h. Wähle $c=1 \in K$)

(..) | ist nicht symmetrisch: es gilt

$1|0$ (denn $0 \underset{6.)}{=} 0*1$, wähle $c=0 \in K$) aber

$0 \nmid 1$ (d.h. nicht $0|1$, 0 teilt nicht 1),

denn falls $0|1$, dann $\exists\, c \in K$ mit $1 = c*0 \underset{6.)}{=} 0$ Widerspruch da $1 \neq 0$

(...) | ist transitiv: Es sei $x|y$ und $y|z$,

d.h. $\exists\, c_1 c_2 \in K$: $y = c_1 * x$ und $z = c_2 * y \Rightarrow$

$z = c_2 * y = c_2 * (c_1 * x) \underset{D1.1.7(K1\otimes)}{=} \underbrace{(c_2 * c_1)}_{\in K} * x$ und $c_1 c_2 \in K \Rightarrow x|z$

Bem: Die obige Rechnung stimmt immer noch, wenn K durch einen kommutativen Ring ersetzt wird (z.B. $\mathbb{Z}$)

2. Möglichkeit: Wegen $x|y \ \forall\, x \in K \setminus \{0\}, \ \forall\, y \in K$

(Wähle $c = \frac{y}{x}$) und ($0|y \Leftrightarrow y=0$) gilt:

$x|y \Leftrightarrow (x=0 \Rightarrow y=0)$ bzw ($x \neq 0$ oder $y=0$)

$\Rightarrow$ | reflexiv (da $x=0 \Rightarrow y=0$)

| nicht symmetrisch (z.B. $x=0$ und $y=1$)

| transitiv (aus $x=0 \Rightarrow y=0$ und $y=0 \Rightarrow z=0$ folgt $x=0 \Rightarrow z=0$

b) Zeige, dass ~: x~y: ⇔ a|(x-y) eine ÄR ist und bestimme alle Äquivalenzklassen. (Hinweis: Unterscheide die Fälle a=0 und a≠0)

//D1.1.4 (302) Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung ∘
// (z.B +, * usw)
// G∘G→G, (a,b)→a∘b,
// sodass folgende Axiome ∀ a,b,c∈G erfüllt sind:
// a) Assoziativgesetz (a∘b)∘c=a∘(b∘c)
// b) ∃ neutrales Element e∈G, a∘e=a
// c) ∀ a∈G ∃ Inverses Element a´∈G: a∘a´=e
//Bem: Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G
//D1.1.6 (306) Vor: Menge $M_R \neq \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
// ⊕: $M_R x M_R \to M_R$ und ⊗: $M_R x M_R \to M_R$
// (M_R,⊕,⊗) ist ein Ring
// ⇔
// es gelten für folgende Axiome:
// • (M_R,⊕) ist abelsche Gruppe
// (R1⊕) (a⊕b)⊕c=a⊕(b⊕c) ∈M_R, ∀ a,b,c∈M_R
// (R2⊕) ∃ e∈M_R: a⊕e=a ∀ a∈M_R
// (R3⊕) ∃ e, a'∈M_R: a⊕a´=e ∀ a∈M_R
// (R4⊕) a⊕b=b⊕a ∈M_R, ∀ a,b∈M_R
// •• (M_R,⊗) ist Halbgruppe
// (R1⊗) (a⊗b)⊗c=a⊗(b⊗c) ∈M_R, ∀ a,b,c∈M_R
// *(R2⊗) ∃ n∈M_R, n=e oder n≠e: a⊗n=n⊗a=a ∀ a∈M_R*
// ••• *(RD⊕⊗) a⊗(b⊕c)=a⊗b+a⊗c ∈M_R ∀ a,b,c∈M_R*
// *(a⊕b)⊗c=a⊗c+b⊗c ∈M_R ∀ a,b,c∈M_R*

Bew: 1. Möglichkeit benutze nur Eigenschaften eines kommutativen Ringes (z.B. **Z**)
x|y: ⇔ ∃ c∈**K** mit y=c*x
x~y: ⇔ a|(x-y)
(.) ~ ist reflexiv: Wegen 0=0·a (mit c=0) gilt a|0=x-x ⇒ x~x
(..) ~ ist symmetrisch: Sei x~y ⇒ a|x-y ⇒ $ c∈**K**: x-y=ca ⇒
$y-x=-(-y)-x=-(-y+x)=-(x+(-y))=-(x-y)=-(ca)=\underbrace{(-c)}_{\hat{I}K}a$ ⇒ a|y-x
⇒ y~x
(...) ~ ist transitiv: Seien x~y und y~z ⇒ a|x-y und a|y-z ⇒
⇒ c_1,c_2∈**K** mit $x-y=c_1a$ und $y-z=c_2a$ ⇒
$x-z \underbrace{=}_{(A2)} (x+0)-z \underbrace{=}_{\text{Rechenr1)}} (x+((-y)+y))-z \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} ((x+(-y))+y)-z=$
$((x+(-y))+y)+(-z)=(x+(-y))+(y+(-z))=(x-y)+(y-z)=$
$c_1a+c_2a=a(c_1+c_2)=\underbrace{(c_1+c_2)}_{\in K}a$ ⇒ a|x-z ⇒ x~z

2. Möglichkeit
1.Fall: a=0: x~y ⇔ x=y
(denn: 0|x-y ⇔ $ c∈**K** $\underbrace{x-y}_{=x+(-y)}$ =c*0=0 ⇔ x=-(-y)=y) ⇒
~ ist ÄR da = eine ÄR ist
2.Fall: a≠0: x~y ∀ x,y∈**K** denn a|x-y ⇔ $ c∈**K**: x-y = c*a
wahr ∀ x,y∈**K** (Wähle c= (x-y)* a^{-1}, beachte a≠0) d.h. ~ ÄR

ÄK: $x|_\sim = \{y\in K \ |y\sim x\} = \begin{cases} \{x\}, \text{falls } a=0 \\ K, \text{falls } a{}^1 0 \end{cases}$????

Es macht wenig Sinn, diese x~y Relation in **K** zu betrachten.

D1.1.8 (325) Die Charakteristik von Körper K

char(K)=das kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\,mal}=0$ falls es dieses m gibt.

Falls es dieses m nicht gibt, gelte char(K)=0

Bsp: F_2 Seite 306

S1.1.1 (321) $char(F_P=Z_{/P})=P$ (P eine Primzahl)

Bew: Annahme chr(K)=m ist keine Primzahl $\Rightarrow$ $m=dk;\ d,k \in \mathbb{N};\ d,k \geq 2$

Sei $\underline{k}=\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{k\,mal} \in K$, $\underline{d}=\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d\,mal} \in K \Rightarrow$

$\underline{d}\ \underline{k}=(\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{k\,mal})(\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d\,mal})=\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d*k\,mal}=0 \Rightarrow \underline{d}$ oder $\underline{k}=0 \underset{d,k<m}{\Rightarrow}$

Fall $\underline{d}=0$, $\underline{k}\neq 0 \Rightarrow \underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d<m\,mal}=0 \Rightarrow$

$\underline{d}<m$ ist kleinste Zahl $\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d\,mal}=0$

Widerspruch zu m kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\,mal}=0$

Fall $\underline{k}=0$ analog

$\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ char(K)ist Primzahl