**A3.5.3**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n \text{ für } k\in\mathbb{N}\text{(fest)}, \ R=?$$

Lös:1.Möglichkeit:Wegen $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \underbrace{=}_{\alpha-n+1=(\alpha+1)-(n+1)+1}$

$$\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots((\alpha+1)-(n+1)+1)\,(n+1)}{(n+1)!\,(\alpha+1)} = \binom{\alpha+1}{n+1}\frac{n+1}{\alpha+1} \quad \forall\ \alpha\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{n+1+k-1}{n+1}} = \frac{\binom{n+1+k-1}{n+1}\frac{n+1}{n+k-1+1}}{\binom{n+1+k-1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+k} = \frac{1+1/n}{1+k/n} \underbrace{\to}_{(n\to\infty)} \frac{1+0}{1+0} = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4} R=1$$

2.Möglkeit mit Hilfe des R der differenzierten Reihe,

Induktion nach k: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n$ hat R=1

//**A2.1.8**(1207) c)Beh: $\forall\ p\in\mathbb{N}$ gilt $0 \le x_n = \sqrt[n]{n^p} - 1 \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$//

k=1: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+1-1}{n}}_{1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ geometrische Reihe R=1

#k=2: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+1}{n}}_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ hat R=1 ($\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} = 1$, **A2.1.8 c)**)

$k\mapsto k+1\ (k\ge 1)$: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k-1}{n}}_{a_n} z^n$ hat nach Induktionsvoraussetzung R=1 $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.6\ 1.)}$

Die differenzierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$

hat R=1.

Wegen $(n+1)\underbrace{a_{n+1}}_{\binom{n+k}{n+1}} = (n+1)\frac{(n+k)(n+k-1)\dots k}{(n+1)!} =$

$\frac{(n+k)(n+k-1)\dots(k+1)}{n!} k = \binom{n+k}{n} k$ folgt

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1/k(n+1)a_{n+1}z^n$ hat R=1.

**A3.5.4** Berechne den Konvergenzradius folgender Potenzreihen :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

//**S3.5.4**(2003) Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $a_n \ne 0\ \forall\ n\ge n_0$ (fast alle), $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

// Beh:In S3.5.2 gilt $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

Lös: $a_n = \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4} R = \frac{1}{e}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\binom{2k}{k} z^{2k}$

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$ $\forall$ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$: 2.)* $\binom{n}{m} = \begin{cases} 0 \text{ falls } n < m \\ \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n \geq m \end{cases}$ //

Lös: $a_n=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \underbrace{=}_{S1.7.4\,2.)} \frac{\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!\,n!}}{\frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)2(n+1)} =$

$\frac{2n+2}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ besitzt Konvergenzradius 1 $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ konvergiert für $|z^2|<1$ und divergiert für $|z^2|>1 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ konvergiert für $|z|<1$ und divergiert für $|z|>1 \Rightarrow R=1$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2} z^k$

Lös: $a_n=(1+1/n)^{-n^2} \Rightarrow R=(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}=(\overline{\lim_{n\to\infty}}(1+1/n)^{-n})^{-1}=e$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\log k}{k}} z^{2k}$.

Lös: $a_n=n^{\frac{\log n}{n}} = \exp(\log(n^{\frac{\log n}{n}}))=\exp(\log n*\log(n^{\frac{1}{n}}))=\exp(\log n*\frac{1}{n}\log n)=$

$\exp(\frac{(\log n)^2}{n}) \Rightarrow (\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}=(\overline{\lim_{n\to\infty}}a^{1/n})^{-1}= (\overline{\lim_{n\to\infty}}\exp(\underbrace{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2}_{\to 0(n\to\infty)}))^{-1}=1 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ hat $R=1 \underbrace{\Rightarrow}_{b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ hat $R=1$

*//**S2.3.20** (1452) 6.)(.)* $1-1/x\leq\log x\leq x-1$ $\forall$ $x>0$.

Beachte, dass $\frac{\log n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, denn es gilt $\log n\leq n-1$,

$\nu=\frac{\log n}{n}=\frac{2\log\sqrt{n}}{n}\leq\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}\leq\frac{2(\sqrt{n})}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

**A3.5.5** Entwickle $\frac{1}{1-z}$ in eine Potenzreihe um -½ auf folgende zwei Arten:

a) Entwickle $\frac{1}{1-z}$ zuerst um den Punkt 0 und wende **S3.5.7** an.

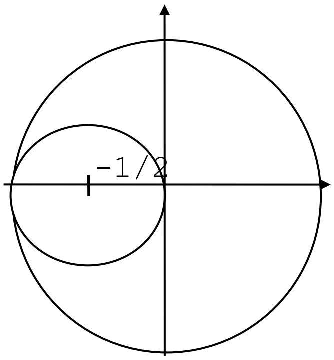
*//**S2.1.2**(1250) Vor: $(z_n)$, z aus $\mathbb{C}$.//*

*//Beh: 13.) Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in\mathbb{N}_0$ mit $z\in U_1(0)$ gilt $z_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} \frac{1}{1-\underbrace{z}_{\neq 1}}$, geom Reihe//*

//**A3.2.22** (1789) Beweise für $x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$ und $k\in\mathbb{N}_0$: $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n$//

*//**S1.7.4** (906) $n,m\in\mathbb{N}_0$: 3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$ falls $n\geq m$*

Lös: $\frac{1}{1-z} \underset{S2.1.2}{\underbrace{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{1}_{a_n} z^n$ für $|z|<1=:R$




Sei $z_0^*=-1/2$, $z_0=0 \Rightarrow r:=|z_0-z_0^*|=1/2<R \underset{S3.5.7}{\underbrace{\Rightarrow}}$

Für $|z-\underbrace{(-1/2)}_{z_0^*}|<\underbrace{R-r}_{=1/2}$ gilt:

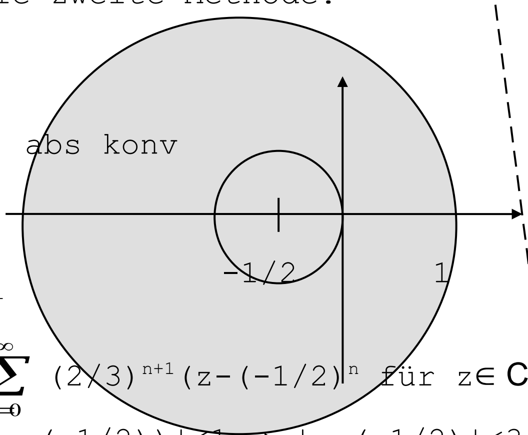
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-\underbrace{z_0^*}_{(-1/2)})^k \text{ mit}$$

$$b_k=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}\underbrace{1}_{a_\nu}(\underbrace{(-1/2)}_{z_0^*}-\underbrace{0}_{z_0})^{\nu-k}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\underbrace{\binom{\nu+k}{k}}_{\underset{S1.7.4\ 3.)}{=}\binom{\nu+k}{\nu}}(-1/2)^\nu$$

$$\underset{A3.2.22,\ |-1/2|<1}{\underbrace{=}}\frac{1}{(1-(-1/2))^{k+1}}=(2/3)^{k+1},\ \forall\ k\in\mathbb{N}_0, \text{ also}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\sum_{k=0}^{\infty}(2/3)^{k+1}(z-(-1/2))^k \text{ für } |z-(-1/2)|<1/2$$

b) Forme $\frac{1}{1-z}$ um, sodass man direkt die geometrische Reihe anwenden kann, um die Potenzreihe um -1/2 zu erhalten. Welchen Vorteil hat hier die zweite Methode?




Lös: $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{\frac{3}{2}-(z-\underbrace{(-1/2)}_{z_0^*})}=$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}(1-\frac{2}{3}(z-(-1/2)))}\underset{\left|\frac{2}{3}(z-(-1/2))\right|<1}{\underbrace{=}}$$

$$\frac{1}{3/2}\sum_{n=0}^{\infty}(2/3^{n+1}(z-(-1/2)))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^{n+1}(z-(-1/2))^n \text{ für } z\in\mathbb{C},$$

$\#|2/3(z-(-1/2))|<1 \Rightarrow 2/3|(z-(-1/2))|<1 \Rightarrow |z-(-1/2)|<3/2$

Vorteil: größeres Konvergenzgebiet, sogar max Konvergenzgebiet R=3/2

**A3.5.6** Bestimme den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Hinweis: Benutze dabei $\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Lös: Abelscher Grenzwertsatz: $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\in\mathbb{R}$,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert da alternierende harmonische Reihe.

Dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right) x^n$ konvergent $\forall\ x\in(-1,1]$ und

$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n= \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hier $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right) x^n= \lim_{x\to 1^-} 1/x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}=$

$\lim_{x\to 1^-} 1/x\log(1+x) \underbrace{=}_{\text{log stetig, } 1/x \text{ stetig}} 1*\log 2=\log 2$

**A3.5.7** Konvergenzradien?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{2}\pi k) x^k$.

*//**S3.5.2**(2001)Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ $\exists$ genau eine Zahl R mit*

*// $0\le R\le\infty$, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der*

*// Eigenschaft:*

// $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut } \forall z\in C \text{ mit } |z-z_0|<R \\ \text{divergiert} \quad \forall z\in C \text{ mit } |z-z_0|>R \end{cases}$

*// Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard),*

*// wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$*

Lös:$a_k$ ...$\sin(0)$, $(\frac{1}{2}\pi)$, $\sin(\pi)$, $\sin(\frac{3}{2}\pi)$...=0,1,0,-1,0,1,0,-1....

-1,0,1 werden $\infty$ oft angenommen. -1,0,1 einzige HW der Folge der $a_k \Rightarrow$

$\overline{\lim_{k\to\infty}}=1$, $\underline{\lim_{k\to\infty}}=-1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \underbrace{=}_{\sqrt[k]{|-1|}=\sqrt[k]{|1|}=1} 1 \Rightarrow R=1$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3k*x^{3k}$.

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} 3k*x^{3k}= \sum_{k=1,\ j=3k}^{\infty} j*x^j=\sum_{j=1}^{\infty} b_j*x^j$ mit $(b_j)$=0,0,1,0,0,1,0,0,1... $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \overline{\lim_{k\to\infty}}$ $\sqrt[k]{|b_k|}=1 \Rightarrow$

R=1

c) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\varphi(k)}$ mit $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

*//**S2.2.1**(1301)*

*//Vor:Sei $z_n$ konvergent mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z$*

*//Beh:Jede (.)Teilfolge $(z_{\nu_n})$ von $(z_n)$, (.) Umordnung und (..)triviale*

*// Abänderung ist konvergent mit $z_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z$*

Lös: Sei $|x|<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ absolut konvergent $\underset{S2.2.1}{\Rightarrow}$

$|x|<1$: $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ konvergent nach beliebiger Umordnung mit $\varphi$

$x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1^{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ divergent, unabhängi g von $\varphi \Rightarrow R=1$

**A3.5.8** Vorgabe: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ mit R.

a) R nach Änderung endlich vieler $a_k$?

Lös: R′ von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ mit $a_k' = a_k$ für fast alle $k \Rightarrow M=\{k \mid a_k' \neq a_k\}$ ist endlich

Folge $d_k = a_k' - a_k \Rightarrow d_k$ fast überall 0.

Sei $R \in [0,\infty]$ von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ (d.h. konvergent $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x<R$) $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + \underbrace{\sum d_k x^k}_{endlicc\ h\ \Rightarrow\ konvergent} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k+d_k) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k \text{ ist konvergent } \forall\ |x|<R.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x|>R$. Annahme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ konvergent $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' - d_k) x^k$ konvergent $\Rightarrow$

Widerspruch zu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für $|x|<R \Rightarrow$

$|x|<R \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ konvergent & $|x|>R \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ divergent

b)R nach Streichen der Hälfte der $a_k$, d.h. $a_k' = a_{2k}$.

Lös: Bsp $(a_k)=1,0,1,0,1,0,\ldots \Rightarrow$

$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \Rightarrow R=1$ für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^k = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow R=\infty$ für $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^k$.

c) $(b_k)$ ist Nullfolge. R für $a_k' = a_k + b_k$

Lös: Bsp $a_k=0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0$ $b_k = \frac{1}{k} \Rightarrow$

$R=\infty$ für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $R=1$ für da $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ divergent für $x=1$

d) R nach $a_k^{'} = c * a_k$.

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c * a_k x^k$ konvergent $\Rightarrow$ R bleibt

e) R nach $a_k^{'} = a_k^2$

Lös: Sei $a_k = c^{-k}$, $c \neq 0 \Rightarrow \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c^{-k}|} = c^{-1} \Rightarrow R = c$

$a_k^{'} = c^{-2k} \Rightarrow R' = 2R$