A5.2.9 Berechne $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)/x$

A5.2.10 Berechne $\lim\limits_{x\to 0} ((\sin x/x)-1/x)$

A5.2.11 Finde ein Beispiel dafür, dass die 1. l'Hospitalsche Regel falsch wird, wenn wir die Voraussetzung $\lim\limits_{x\to b_-} f(x)=\lim\limits_{x\to b_-} g(x)=0$ fallen lassen

A5.2.12 Bestimme alle Extremwerte der folgenden Funktionen:
a) $f:[-1,8]\to \mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+20$

//**S5.2.5**(2805)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)//
//Vor: $M\subset \mathbb{R}$, $f:M\to \mathbb{R}$ habe ein lokales Extremum in $x_0\in \overset{\circ}{M}$ und f sei //
differenzierbar in x_0//
//Beh: $f'(x_0)=0$//
//**S5.3.2**(2905) Hinreichende Bedingung für lokale Extrema bzw. //
//Wendepunkte//
//Vor: Sei $M\subset \mathbb{R}$, $f:M\to \mathbb{R}$ gegeben und $x_0\in \overset{\circ}{M}$.//
//1.) Sei f 2n-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset M$, $n\in\mathbb{N}$, //
// $f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=1,3,..,2n-1$, $f^{(2n)}(x_0)\neq 0$.//
// Beh: f besitzt in x_0 ein lokales Extremum und zwar//
// ein lokales $\begin{matrix}\text{Maximum, wenn } f^{(2n)}(x_0) < 0 \text{ ist}\\ \text{Minimum, wenn } f^{(2n)}(x_0) > 0 \text{ ist}\end{matrix}$//

Lös: $f(x)$ lässt sich auf $\mathbb{R}$ (stetig) fortsetzen $\Rightarrow$
$f(x)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (da Polynom) und
$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)=4x(x-1)(x-2)$
$f''(x)=12x^2-24x+8$ $\Rightarrow$ Die Nullstellen von $f'(x)$ sind 0,1 und 2
(nach S5.2.5 hat f evt ein lokales Extremum in 0 bzw 1 bzw 2)

$f''(0)=8>0 \underset{S5.3.2}{\Rightarrow}$ f hat in $x_1=0$ ein lokales Minimum

$f''(1)=-4<0 \underset{S5.3.2}{\Rightarrow}$ f hat in $x_2=1$ ein lokales Maximum

$f''(2)=8>0 \underset{S5.3.2}{\Rightarrow}$ f hat in $x_3=2$ ein lokales Minimum

Noch gesucht: globale Extrema von $f(x)$ auf $M=[-1,8]$
Als globale Extrema kommen nur lokale Extrema oder Randpunkte von M in Frage. Funktionswerte in diesen

Punkten: $f(-1)=29$, $f(0)=20$, $f(1)=21$, $f(2)=20$,

$f(8) \underset{2^3=8}{=} \underbrace{2^{12}-2^{11}}_{2048}+\underbrace{2^8}_{=256}+20=2324 \Rightarrow$

f hat auf M in 0 und 2 ein globales Min mit Fktwert 20
und in 8 ein globales Max mit Fktwert 2324

*//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//*
//Vor:Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b ($-\infty\le a<b\le\infty$). //
// $f:I\to\mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//
//Beh://
//1.)f $\nearrow$bzw. f$\searrow$ auf I $\Leftrightarrow$ $f'\ge 0$ bzw. $f'\le 0$ auf(a,b).//
//2.)f konstant auf I $\Leftrightarrow$ $f'=0$ auf (a,b).//
//3.)$f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bem:Jetzt kann man noch eine Kurvendiskussion durchführen, um eine genauere Information über den Verlauf des Graphen zu erhalten.

Monotonie:

$f'(x)=4x(x-1)(x-2)<0$ auf $(-\infty,0)$, $f'(x)>0$ auf $(0,1)$,

$f'(x)<0$ auf $(1,2)$ und $f'(x)>0$ auf $(2,\infty)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.4\ 3.)}$

f $\downarrow$ auf $(-\infty,0)$, f $\uparrow$ auf $(0,1)$, f $\downarrow$ auf $(1,2)$, f $\uparrow$ auf $(2,\infty)$

Konvexität:

$f''(x)=12(x^2-2x+2/3)=12(x-(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})(x-(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}))$

(da $x^2-2x+2/3=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \Rightarrow a+b=-2,\ ab=2/3 \Rightarrow b=-2-a$

$a(-2-a)=2/3 \ldots a=1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ usw) $\Rightarrow$

$f''(x)>0$ auf $(-\infty,1-\frac{1}{3}\sqrt{3})$, $f''(x)<0$ auf $(1-\frac{1}{3}\sqrt{3},1+\frac{1}{3}\sqrt{3})$ und

$f''(x)>0$ auf $(1+\frac{1}{3}\sqrt{3},\infty)$ $\Rightarrow$

f konvex (linksgekrümmt) auf $(-\infty,1-\frac{1}{3}\sqrt{3})$ und auf $(1+\frac{1}{3}\sqrt{3},\infty)$,

f konkav (rechtsgekrümmt) auf $(1-\frac{1}{3}\sqrt{3},1+\frac{1}{3}\sqrt{3})$,

insbesondere hat f in $1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ Wendepunkte

(Alternative Begründung:

$f'''(x)=24x-24=24(x-1)$,

$f'''(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})\ne 0 \Rightarrow$ f hat WP in $1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$f'''(1+\frac{1}{3}\sqrt{3})\ne 0 \Rightarrow$ f hat WP in $1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b) $f:[-1,1]\to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$

Lös: f ist eine gerade Funktion, d.h. $f(-x)=f(x)\ \forall\ x\in(-1,1)$

$f(x)$ beliebig oft differenzierbar auf $(-1,1)$ und

$$f'(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)\ \Rightarrow$$

Die Nullstellen von $f'(x)$ sind

$0,-\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (mögliche lokale Extrema)

Es gilt: $f'(x)>0$ auf $(-1,-\sqrt{\frac{2}{3}})$, $f'(x)<0$ auf $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$,

$f'(x)>0$ auf $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$, und $f'(x)<0$ auf $(\sqrt{\frac{2}{3}},1)$ $\Rightarrow$

$f\uparrow$ auf $(-1,-\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$, $f\downarrow$ auf $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$ und $(\sqrt{\frac{2}{3}},1)$

$\Rightarrow$ f hat auf (-1,1 in 0 ein lokales Minimum und in

$-\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$ jeweils ein lokales Maximum.

Wegen $\lim\limits_{n\to -1_+} f(x)=0=\lim\limits_{n\to -1_-} f(x)$, $f(-\sqrt{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}=f(\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $f(0)=0$

Folgt: f hat in 0 ein globales Minimum mit $f(0)=0$ und in

$-\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$ jeweils ein globales Maximum mit

Funktionswert $\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}\approx 0{,}3844$

Bem: Dass f in 0 ein globales Min hat, hätte man auch schneller sehen können: $f(x)\geq 0\ \forall\ x\in(-1,1)$ und $(f(x)=0 \Leftrightarrow x=0)$ $\Rightarrow$ f hat nur in 0 ein globales Min.

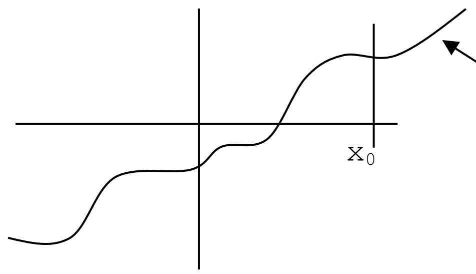
Da f gerade ist, hätte es gereicht, die Fkt auf $[0,1)$ zu untersuchen (damit hätte man das globale Max etwas schneller erkannt)

A5.2.13

a) Es sei ein Intervall, f: I→**R** differenzierbar (auf I), $f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{x_0\}$ und $f'(x_0)=0$ für ein $x_0\in I$. Zeige, dass f streng monoton wachsend ist.

*//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//*
//Vor: Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b ($-\infty\le a<b\le\infty$). //
*// f:I→**R** sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//*
//Beh://
//1.) f ↗ bzw. f ↘ auf I ⇔ $f'\ge 0$ bzw. $f'\le 0$ auf (a,b).//
//2.) f konstant auf I ⇔ $f'=0$ auf (a,b).//
//3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) ⇒ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bew:



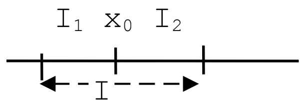
Überlegungsskizze

↑

$f'(x)\ge 0\ \forall\ x\in I \underset{S5.2.41.)}{\Rightarrow}$ ↗f auf I und wegen

$f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{x_0\} \underset{S5.2.43.)}{\Rightarrow}$ ↑ auf Intervallen I_1 & I_2:

$I\setminus\{x_0\}=I_1\cup I_2$ & $I_1\cap I_2=\emptyset$



($I\setminus\{x_0\}$ kann in 2 Intervalle I_1 und I_2 zerlegt werden, sodass x_0 rechter Randpunkt von I_1 und x_0 linker Randpunkt von I_2 falls $I_1, I_2\ne\emptyset$. Seien $x_1,x_2\in I$ bel. mit $x_1<x_2$), Z.z. $f(x_1)<f(x_2)$

$$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)\setminus\{x_0\} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1)<f(\xi)\le f(x_2)\ oder \\ f(x_1)\le f(\xi)<f(x_2)\ \#oder \\ \#\ f(x_1)<f(\xi)<f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)$

b) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$. Zeige, dass f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Umkehrfunktion besitzt. Wo ist f^{-1} differenzierbar? Bestimme dort die Ableitung (von f^{-1}).
Hinweis: Zeige, dass f streng monoton auf $\mathbb{R}$ ist.

//a) $f: I\to\mathbb{R}$ differenzierbar (auf I),//
// $f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{x_0\}$ und $f'(x_0)=0$ für ein $x_0\in I \Rightarrow f\uparrow$ //
//**Bsp**(2410): 2.) $f(z)=z\ \forall\ z\in\mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$,
//**S4.3.2**(2408) Trigonometrische Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.//
//**S4.3.4**(2409) Rechenregeln für Stetigkeit//
//Vor: $M\subset\mathbb{R}$, f,g mit $M\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.//
//Beh: 2.) $\alpha f+\beta g$ stetig in $x_0\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{C}$),//
*//**S4.4.3** (2530) Umkehrfunktion//*
//Vor: Sei $I\subset R$ ein Intervall, $f:I\to R$ stetig auf I und //
// $J:=f(I)$.//
//Beh: Zu f $\exists$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}:J\to I$ genau dann, wenn f //
// auf I streng monoton ist. In diesem Falle ist f^{-1} stetig //
// auf J und im gleichen Sinn streng monoton wie f//
*//**S4.4.1** (2500) Zwischenwertsatz (ZWS)//*
//Vor: Sei $I\subset R$ ein Intervall $\wedge$ $f:I\to R$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.//
//Beh: 1.) $f(a)<y<f(b)\ :\ \forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.//
(Hinweis: Zeige, daß f streng monoton auf $\mathbb{R}$ ist).
//**S5.1.6**(2750) Differentiationsregeln//
//3.) Ableitung der Umkehrfunktion//
// Vor: Sei $A,B\subset\mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in //
// $x_0\in\overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in\overset{o}{B}$ //
//Beh: f^{-1} ist differenzierbar in $y_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und //
// $f'(x_0)\neq 0$ und dann gilt//
// $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.//

Lös: f(x) ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$f'(x)=1+\underbrace{\cos x}_{\geq -1} \Rightarrow f'(x)\geq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}\ (\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.4\ 1.)}\nearrow f$ auf $\mathbb{R}$)

$f'(\underbrace{x}_{x_0})=0 \Leftrightarrow \cos\underbrace{x}_{x_0}=-1 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{x_0}=\pi+2k\pi$ für ein $k\in Z$ $\underbrace{\Rightarrow}_{f'(x)\geq 0}$

$f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{\underbrace{x}_{x_0}=\pi+2k\pi\}$

Sei $I_k:=[2k\pi,2(k+1)\pi]$, $k\in Z \Rightarrow \mathbb{R}=\bigcup_{k\in Z} I_k \underbrace{\Rightarrow}_{a)}$

$f\uparrow$ auf $\mathbb{R}$ (d.h. jedem I_k, da $f'(x)>0\ \forall\ x\in I_k\setminus\{\pi+2k\pi\}$, $f'(\pi+2k\pi)=0$)

$\overbrace{\underbrace{x}_{Bsp(2410)}+\underbrace{\sin x}_{S4.3.2}}^{S4.3.4\,2.)} \Rightarrow$ f stetig & $\uparrow$ auf $\mathbb{R}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.3}$

f besitzt stetige Umkehrfunktion $f^{-1}:\underbrace{f(\mathbb{R})}_{=\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}=\infty$ $\wedge$ $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ $\underbrace{\Rightarrow}_{f\ stetig\,\wedge\,S4.4.1\,\wedge\,S4.4.3}$ $f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ $\wedge$ $f^{-1}\uparrow$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Bem: S4.4.3 ⇒ $f^{-1}\uparrow$ auf $\mathbb{R}$. f^{-1} stetig auf $\mathbb{R}$ und
$f'(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}=:M$ nach S5.1.6 3.) differenzierbar auf
$f(M)=\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi+\underbrace{\sin(\pi+2k\pi)}_{=0}):k\in\mathbb{Z}\}=M$ und
$(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{1+\cos(f^{-1}(y))}\ \ \forall\ y\in M$. Auf $\mathbb{R}\setminus M$ ist f^{-1}
nicht differenzierbar (folgt auch aus S5.1.6 3.))

c) Es sei $f:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\tan x$. Zeige, dass f eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und bestimme deren Ableitung.

//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//
//Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar $\forall\ x\in(a,b)$.//
//Andere Formulierung://
//Vor:Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$. //
// $f:I\to\mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//
//Beh:3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) ⇒ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bew: f(x) ist differenzierbar auf $(-\pi/2,\pi/2)$ und
$f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\ \ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$.
Wegen $f'(x)\geq 1>0\ \ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$ ist f nach S5.2.4 2.) $\uparrow$ wachsend und besitzt also (da f stetig) eine stetige Umkehrfunktion
$f^{-1}:\ \underbrace{f((-\pi/2,\pi/2))}_{=\mathbb{R}\,*}\to(-\pi/2,\pi/2)$.
f^{-1} stetig und $f^{-1}(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)\ \underset{S5.1.6\ 3.)}{\Rightarrow}$
f^{-1} differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=$
$\#\dfrac{1}{f'(\arctan y)}=\dfrac{1}{f'(\arctan(\tan x))}=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\#\dfrac{1}{1+y^2}\ \ \forall\ y\in\mathbb{R}$
(d.h. $\dfrac{d}{dx}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}$)
$*\ \lim\limits_{x\to-\pi/2} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)=\infty$ und ZWS

A5.2.14 Bestimme für folgende Funktionen f auf $\mathbb{R}$ die Stellen, an denen lokale Extrema vorliegen und gib an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.
a) $f(x)=e^{x^2-x+1}$
Lös: $0=f'(x)=e^{x^2-x+1}(2x-1)\ \Leftrightarrow\ 2x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=1/2$
$f''(x)=e^{x^2-x+1}(2x-1)^2+e^{x^2-x+1}\ast 2,\ f''(1/2)=e^{1(4-1/2+1}\ )^2+e^{x^2-x+1}\ast 2>0$
⇒ Minimum
b) $f(x)=\sin x\ast e^x$.
Lös: $f'(x)=\cos x e^x+\sin x e^x=(\sin x+\cos x)e^x=0\ \Leftrightarrow\ \sin x=-\cos x$
$f''(x)=(\cos x-\sin x)e^x+(\sin x+\cos x)e^x=2\cos x e^x\begin{cases}<0, x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\ Max\\ >0, x=\dfrac{7\pi}{4}+k2\pi\ Min\end{cases}$

A5.2.15 Gegeben sei die Funktion $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Bestimme die Anzahl und Art der lokalen Extrema in Abhängigkeit von den Konstanten.

Lös: $f(x)'=3x^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{b}=\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-12c}}{b}$

1.Fall: $4b^2-12c<0 \Rightarrow$ keine Lösung, also keine Extrema

2.Fall: $4b^2-12c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{3}b^2$, $x=-\frac{4b}{2b}=-b/2$…2.Ableitung 0

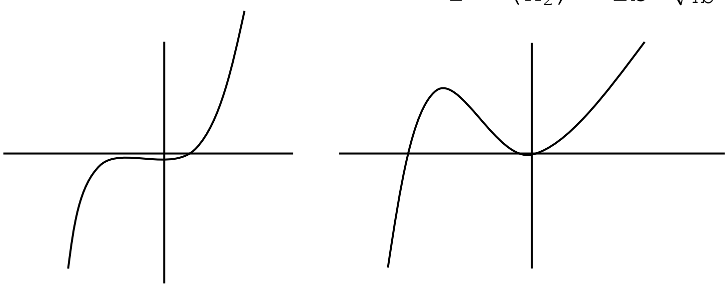
$f'(x)=3x^2+2bx+c=3x^2+2bx+\frac{1}{3}b^2=3(x+b/3)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x)$ ist monoton wachsend $\Rightarrow$ keine Extrema

3.Fall: $4b^2-12c>0$, dann

$x_1=\frac{-2b-\sqrt{4b^2-12c}}{b}$, $x_2=\frac{-2b+\sqrt{4b^2-12c}}{b}$

$f''(x)=6x+2b$, $f''(x_1)=-2b-\sqrt{4b^2-12c}+2b<0 \rightarrow$ Max

$f''(x_2)=-2b+\sqrt{4b^2-12c}+2b>0 \rightarrow$ Min



A5.2.16 Die Gleichung $x^7-3x^6+2x^2-1=0$ besitzt in $\mathbb{R}$ mindestens eine Lösung

A5.2.17 Konvergenz der Reihen?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\log(k)}{k}$

Lös: $f(x)=\frac{\log(x)}{x}$

A5.2.18
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, völlig beliebig (auch unstetig, nicht differenzierbar)
$g(x)=e^{f(x)}$.
Zeige: $(\xi,f(\xi))$ Extremstelle von $f(x) \Leftrightarrow (\xi,g(\xi))$ Extremstelle von $g(x)$

Bew: "$\Rightarrow$" Sei ξ lokales Maximum von $f \Rightarrow \exists\ \varepsilon>0$: $f(x)\leq f(\xi)\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi) \underbrace{\Rightarrow}_{x\mapsto e^x\uparrow}$

$e^{f(x)}\leq e^{f(\xi)}\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi) \Rightarrow \xi$ lokales Maximum von g.

Analog für Minimum

$\Rightarrow \xi,f(\xi))$ Extremstelle von $f(x) \Rightarrow (\xi,g(\xi))$ Extremstelle von $g(x)$

"$\Leftarrow$" Sei ξ lokales Maximum von $g(x) \Rightarrow \exists\ \varepsilon>0$: $e^{f(x)}\leq e^{f(\xi)}\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi)$

$e^x\in(0,\infty)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ & $\log \uparrow$ auf $(0,\infty) \Rightarrow \log(e^{f(x)})\leq\log(e^{f(\xi)})\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\log\ Umkehrf\ zu\ \exp} f(x)\leq f(\xi)\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi) \Rightarrow \xi$ lokales Maximum von f. Analog Min

$\Rightarrow (\xi,f(\xi))$ Extremstelle von $f(x) \Leftrightarrow (\xi,g(\xi))$ Extremstelle von $g(x)$

A5,2,19 $f(x)=\cos(2\pi x)$, Alle Extremstellen und Wendepunkte?

*//**S5.1.6** (2750) 2.)Kettenregel*
//Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei
// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.
//Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.
*//**S5.2.1** (2800)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)*
//Vor: I offenes Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$,
// f in x_0 differenzierbar
//Aussage: x_0 ist lokales Extremum $\underbrace{\Rightarrow}_{!}$ $f'(x_0)=0$
*//**S5.2.7** (2807)*
//Vor:f in (a,b)differenzierbar, $x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)=0$, $\exists\, f''(x_0)\neq 0$
//Aussage: f hat in x_0 ein lokales Extremum:
// Minimum falls $f''(x_0)>0$, Maximum falls $f''(x_0)<0$

Lös: ● Extrama

cos beliebig oft differenzierbar & stetig ⇒ dgl f(x) ⇒

$f'(x)\underbrace{=}_{S5.1.6\,2.)}(2\pi x)'\cos'(2\pi x)=-2\pi\sin(2\pi x)$, $f''(x)\underbrace{=}_{S5.1.6\,2.)}-4\pi^2\cos(2\pi x)$,

$f'''(x)\underbrace{=}_{S5.1.6\,2.)}8\pi^3\sin(2\pi x)$,

$f^{(k)}(x+j)\underbrace{=}_{\text{alle } f^{(k)} \text{ periodisch}} f^{(k)}(x)\ \forall\ k\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R}$

Sei ξ Extremstelle von $f'(x)=-2\pi\sin(2\pi\xi)\overbrace{\underbrace{=}_{S5.2.1}}^{notwendig}0\Rightarrow\xi=\frac{1}{2}k$.

$f''(x)=-4\pi^2\cos(2\pi x)\underbrace{=}_{hinreichend)}0\Rightarrow x\underbrace{=}_{k\in Z}\frac{1}{2}\underbrace{k}_{=0}+\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\min(|(f'x)-f''(x)|)\underbrace{=}_{f'(x)=0,f''(x)=0}\frac{1}{4}\Rightarrow f'(x)\neq f''(x)\Rightarrow(f'(x)=0\Rightarrow f''(x\neq 0))$

$\Rightarrow\ \forall\ \xi=\frac{1}{2}k$: $f'(x)=0$ & $f''(x)\neq 0\ \overbrace{\underbrace{=}_{S5.2.7}}^{hinreichen}\ \frac{1}{2}k$ sind alle Extremstellen.

● ● Analog Wendepunkte, sin und cos vertauscht

$f''(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}\Rightarrow f'''(\frac{1}{2}k-\frac{1}{4})\neq 0$ da $f'''(x)=0$ nur für $x=\frac{1}{2}k$

x Extremstelle von f $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}k\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$,

x Wendepunkt von f $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$,

● ● ● k ungerade $\Rightarrow x=k-\frac{1}{4}$: $(\cos(2\pi(\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}))>0\Rightarrow f''(x)<0))\Rightarrow$ x ist Max