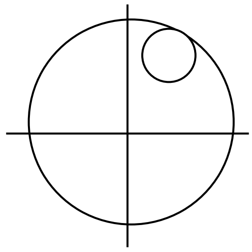
D2.1.3(1250) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{K}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbb{N}: n,m\geq N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$

S2.1.2(1250) Eigenschaften konvergenter Folgen
Vor: Seien $(a_n),(b_n),a,b$ aus $\mathbb{R}$, $(z_n),(w_n),w,z,z_0$ aus $\mathbb{C}$, konvergent mit
$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, $w_n \xrightarrow{n\to\infty} w$.
Beh:
1.) Jede konvergente Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt



Bew: $\exists\ z: \underbrace{z_n \to}_{n\to\infty} z$. Zu $\varepsilon:=1\ \exists\ n_0(\underbrace{\varepsilon}_{=1}): |z_n-z|<1 \Rightarrow$

$|z_n|=|z_n-z+z|\leq|z_n-z|+|z|<|z|+1\ \ \forall\ n\geq n_0$

$|z_n|\leq K:=\max\{|z_1|,|z_2|,...|z_{n_0-1}|,1+|z|\}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$

endlich viele reelle Zahlen

Bem.: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \Rightarrow z_n$ beschränkt, aber

$z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \not\Leftarrow z_n$ beschränkt. Bsp: $z_n=(-1)^n$.

2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge, d.h.
(*) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ |z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0$
Bew: $\varepsilon>0$ gegeben. $\exists\ z(\varepsilon)\in\mathbb{C},\ n_0(\varepsilon/2)\in\mathbb{N}:\ |z_n-z|\leq\varepsilon/2$
($\varepsilon/2$ oder ε egal) $\forall\ n\geq n_0(\varepsilon/2)$ (genauso mit m)
$\Rightarrow\ |z_n-z_m|=|z_n-z+z-z_m|\leq|z_n-z|+|z-z_m|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon/2):=n_0(\varepsilon/2)$

Andere Formulierung im Zusammenhang mit Häufungswerten siehe Seite 1503:

Bem: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|\leq\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$

$z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \underbrace{\Leftarrow}_{S2.2.5}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|\leq\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$

3.) $z_{n+1}-z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ und $z_{2n}-z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$
Bew: folgt aus 2.) mit $m=n+1$ bzw $m=2n$

4.) $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|z|$
Bew: $||z_n|-|z||\leq|z_n-z|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n+w_n)=z+w$
Bew: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon): |z_n-z|<\varepsilon/2$ und $\exists\ n_2(\varepsilon): |w_n-w|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n\geq n_2(\varepsilon)$
$|(z_n+w_n)-(z+w)|\leq \underbrace{|z_n-z|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{|w_n-w|}_{<\varepsilon/2}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon):=\max\{n_1(\varepsilon/2),n_2(\varepsilon/2)\}$

6.) $\lim\limits_{n\to\infty}(cz_n)=cz\ \ \forall\ c\in\mathbb{C}$
Bew: $c=0,\ z_n=0\ \ \forall\ n \Rightarrow$ ok

$c\neq0,\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\frac{\varepsilon}{|c|})\in\mathbb{N}:\ |z_n-z|<\frac{e}{|c|}\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$

$|cz_n-cz|=|c|\,|z_n-z|<|c|\frac{e}{|c|}=\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$

7.) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_nw_n)=zw$

Bew: $|z_nw_n-zw|=|z_nw_n-zw_n+zw_n-zw|\leq|w_n|\,|z_n-z|+|z|\,|w_n-w|\ (\underset{1.)}{\Rightarrow} |w_n|\leq k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N})\leq$

$k|z_n-z|+|z||w_n-w| \quad \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{k+|z|}\right)}_{>0}:$

$|z_n-z|<\frac{\varepsilon}{k+|z|} \quad \forall\ n\geq n_0$ und $\exists\ n_1(\frac{\varepsilon}{k+|z|})\in\mathbb{N}: |w_n-w|<\frac{\varepsilon}{k+|z|} \quad \forall\ n\geq n_1$

$n_2(\frac{\varepsilon}{k+|z|}):=\max\{n_1,n_2\} \Rightarrow |z_nw-zw|\leq k\frac{\varepsilon}{k+|z|}+|z|\frac{\varepsilon}{k+|z|}=\varepsilon \quad \forall\ n\geq n_2$

Andere Formulierung:

$\lim\limits_{n\to\infty}(z_nw_n)=zw$

*//**S1.2.1** (406) K, a,b∈K angeordnet. 6.)|a+b|≤|a|+|b|*
//(Dreiecksungleichung)

Bew: $\varepsilon>0$: $\exists\ K>0: |w_n|\leq K\ \forall\ n$ (konvergent ⇒ beschränkt)

$|z_nw_n-zw|=|z_nw_n-zw-w_nz+w_nz| \underbrace{\geq}_{S1.2.1} \underbrace{|w_n|}_{beschränkt} |z_n-z|+|z||w_n-w|$

$(\underbrace{\Rightarrow}_{1.)} |w_n|\leq K \quad \forall\ n\in\mathbb{N})$

$z=0: |z_nw_n-zw|\leq K|z_n-z|<\varepsilon \quad \forall\ n\geq n_1(\varepsilon/K)$

$z\neq 0: |z_nw_n-zw|\leq K\underbrace{|z_n-z|}_{<\frac{\varepsilon}{2k}}+|z|\underbrace{|w_n-w|}_{<\frac{\varepsilon}{2|z|}}<\varepsilon$

$\forall\ n\geq n_0(\varepsilon):=\max\{n_1(\frac{\varepsilon}{2K}), n_2(\frac{\varepsilon}{2|z|})\}$

8.) $b\neq 0 \Rightarrow |b_n|>|b|/2$ und $(\frac{a_n}{b_n}) \underbrace{\to}_{n\to\infty} (\frac{a}{b})$.

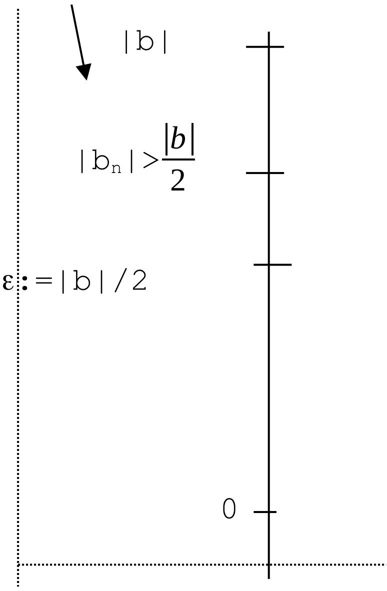
Bew: $b_n\to b$, $b\neq 0$, gewählt $\varepsilon:=\frac{|b|}{2}>0 \Rightarrow \exists\ n_1(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}: |b_n-b|<\frac{|b|}{2} \quad \forall\ n\geq n_1 \Rightarrow$

(Dreiecksungl nach unten) $|b_n|=|b_n-b+b|\geq|b|-|b_n-b|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2} \quad \forall\ n\geq n_1$

$|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}|=\frac{1}{|b_nb|}|b_n-b|\leq\frac{1}{\frac{|b|}{2}|b|}|b_n-b|=\frac{2}{|b|^2}|b_n-b| \quad \forall\ n\geq n_1$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}|b|^2}_{e^*})\in\mathbb{N}: \ |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}|b|^2 \quad \forall\ n\geq n_0, n_1 \Rightarrow$

$|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}|<\frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon=\varepsilon \quad \forall\ n\geq n_0, n_1 \underbrace{\Rightarrow}_{7.)} \frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b} \quad n\geq n_1$



Andere Formulierung:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{z_n}{w_n})\to(\frac{z}{w}) \quad (n\to\infty),\ w\neq 0$

Bem: Gewisse w_n können 0 sein:

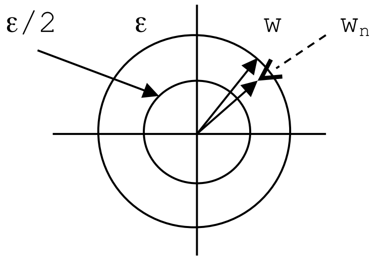
$\varepsilon_0:=|w|$ und $|w_n-w|<\varepsilon_0/2 \quad \forall\ n\geq n_0(\varepsilon_0/2) \Rightarrow$

$|w_n|\geq\varepsilon_0/2 \quad \forall\ n\geq n_0(\varepsilon_0/2)$

Bew: $w\neq 0$, $|w|=\varepsilon_0>0$, $|w_n|\geq\varepsilon_0/2 \quad \forall\ n\geq n_2(\varepsilon_0/2)$

$\left|\frac{z_n}{w_n}-\frac{z}{w}\right|=\left|\frac{z_n}{w_n}-\frac{z}{w_n}+\frac{z}{w_n}-\frac{z}{w}\right|\leq\left|\frac{1}{w_n}\right||z_n-z|+|z|\left|\frac{1}{w_n}-\frac{1}{w}\right| \underbrace{\geq}_{n\geq n_2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)}$

$$\frac{2}{\varepsilon_0}\underbrace{|z_n-z|}_{<\varepsilon}+\underbrace{\frac{|z|}{|w_n||w|}}_{\geq\frac{|z|2}{\varepsilon_0^2}}\underbrace{|w_n-w|}_{<\varepsilon/2}<\varepsilon$$



$\forall\ n\geq n_0(\varepsilon):=\max\{n_2(\frac{\varepsilon_0}{2}),n_1(\frac{2}{\varepsilon_0}),n_3(\frac{2|z|}{\varepsilon_0^2})\}$

Bem:a) Seien alle $z_n\neq 0$, und gelte $\lim_{n\to\infty} z_n=z\neq 0$. Dann ist auch

die Folge der Kehrwerte $(1/z_n)$ konvergent, und $\lim_{n\to\infty} 1/z_n=1/z$

*//**D2.1.1**(1200)Bem 5.)Beh.: $\lim_{n\to\infty} z_n=z\neq 0 \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0:\ z_n\neq 0$//*

*//**S2.1.1** (1205)Geg (x_n) und (y_n) in K. Dann gilt://*

// b)Ist (x_n) eine Nullfolge und ist (y_n) beschränkt, so ist (x_ny_n)//

// ebenfalls eine Nullfolge//

Bew: D2.1.1 Bem 5.) $\Rightarrow |z_n|\geq|z|/2\ \forall n_0\in\mathbb{N} \Rightarrow |(1/z_n)|$ beschränkt

$|(1/z_n)|-|(1/z)|=(|z|-|z_n|/|z||z_n| \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.1\,b)} \lim_{n\to\infty}|1/z_n|=|1/z|$

b)Es reicht $w\neq 0$: $\varepsilon_0:=|w|$ $|w_n-w|<\varepsilon_0/2\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$|w_n|\geq\varepsilon_0/2\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon/2)$

9.)Gilt $z_n\xrightarrow{n\to\infty} z$ folgt für jedes feste $k\in\mathbb{N}$:

(.) $z_n^k\to z^k$ (..) $z_n^{-k}\to z^{-k}$ falls $z\neq 0$, $z_n\neq 0\ \forall\ n$

Bew aus 5.)-8.) und Induktion

10.)Gilt $z_n=z_0\ \forall\ n\geq n^*\ (n^*\in\mathbb{N})$ so folgt $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0$

Bew: $\varepsilon>0$ gegeben, $|z_n-z_0|=|z_0-z_0|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n^*=:n_0(\varepsilon)$

11.) $z_n=z/n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ mit $z\in\mathbb{C}$ gilt: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

Bew: $\varepsilon>0$. $|z_n-0|=\frac{|z|}{n}<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)=\underbrace{\left[\frac{z}{\varepsilon}\right]+1}_{>\frac{|z|}{\varepsilon}}$

12.)Für $z_n=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, mit einem $z\in U_1(0)$ gilt: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

Bew:1.Fall: $z=0$, $z_n=0\ \forall\ n\geq 1$ ok

2.Fall: $z\neq 0$, $|z|=\frac{1}{1+r}$ mit einem $r>0$

$$|z^n-0|=|z|^n=\frac{1}{(1+r)^n}\underbrace{\geq}_{Bernoulli}\frac{1}{1+nr}\leq\frac{1}{nr}<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon):=\left[\frac{1}{r\varepsilon}\right]+1$$

Bem: $z_n=nz^n$, $z\in U_1(0)$, Beh $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

Bew: $|z|=\frac{1}{1+r}$, $|nz^n-0|=\frac{n}{(1+r)^n}\leq\frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}r^2\ldots}$

n_0 bestimmen

13.) Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in\mathbb{N}_0$ mit $z\in U_1(0)$ gilt $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{1-\underbrace{z}_{¿1}}$, geom Reihe

//**D2.1.1** *Bsp 4.) (1203)* $a_n=\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $|x|<1 \Rightarrow a_n\to\frac{1}{1-x}$ $(n\to\infty)$ $\forall\ |x|<1$//

//**S1.5.6** *(715) Bernoulli* $x\in R$, $x\geq -1$, $n\in N$; $(1+x)^n \geq 1+nx$, „=" $\Leftrightarrow$ $x=0 \wedge n=0 \wedge n=1$

Bew: 1. Fall: $z=0$, $z_n=1$ $\forall$ n ok ($n=0$, $0^0=1$!!!)

2. Fall: $z\neq 0$, $|z|=\frac{1}{1+r}$ mit einem $r>0$. D2.1.1 Bsp 4 $z_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

$$|1-z|\geq 1-|z|=\frac{r}{1+r},\quad \left|z_n-\frac{1}{1-z}\right|=\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right|\leq\frac{1+r}{r}|z|^{n+1}=\frac{1+r}{r(1+r)^{n+1}}=$$

$$\frac{1}{r(1+r)^n}\underbrace{\leq}_{S1.5.6}\frac{1}{r(1+nr)}=\frac{1}{r+nr^2}\leq\frac{1}{nr^2}=\frac{1/r^2}{n}<\varepsilon\quad\forall\ n\geq\underbrace{\left[\frac{1}{r^2\varepsilon}\right]+1}_{=:n_0(\varepsilon)}$$

Bsp: 1.) $a_n=(-1)^n$, $a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n=2(-1)^{n+1}\to\!\!\!\!/$ Cauchy nicht erfüllt

2.) $z_n=(-1)^n$ ist eine divergente Folge
$|z_{n+1}-z_n|=2\not<\varepsilon=1$ egal wie groß n wird, also ist die für die Konvergenz notwendige Bedingung verletzt.

3.) $a_n:=\sum_{k=1}^{n} 1/k=1+1/2+1/3+\ldots 1/n$ (harmonische Reihe)

$$a_{2n}-a_n=\sum_{n=1}^{2n}1/k-\sum_{k=1}^{n}1/k=\sum_{k=n+1}^{2n}1/k\geq\sum_{k=n+1}^{2n}1/(2n)=\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}1=\frac{n}{2n}=1/2$$

$a_{2n}-a_n\geq 1/2 \overset{\to}{_{\text{nicht}}} 0$.. <u>nicht konvergent</u>

4.) $a_n=\sqrt[n]{n}\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$, $a_n\to 1$,

$b_n=a_n-1=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$, $\sqrt[n]{n}=1+b_n$, $n=(1+b_n)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}b_n^\nu=1+(nb_n)+\frac{n(n-1)}{2}b_n^2+\ldots$

$n\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}b_n^2 \Rightarrow n-1\geq\frac{n(n-1)}{2}b_n^2 \Rightarrow 1\geq\frac{n}{2}b_n^2 \Rightarrow b_n^2\leq 2/n$ $(n-1\neq 0)$ für $n\geq 2$

$\Rightarrow\ 0\leq b_n^2\leq 2/n$, $b_n^2\to 0$, $b_n\to 0$

5.) $\alpha\neq 0,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $a\neq 0, b, c\in\mathbb{R}$. $a_n=\frac{\alpha n^3+\beta n^2+\gamma}{an^3+bn+c}=\frac{\alpha+\overbrace{\frac{\beta}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{\gamma}{n^3}}^{\to 0}}{a+\underbrace{\frac{b}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{c}{n^3}}_{\to 0}}\to\frac{\alpha}{a}$,

6.) $a_n=\frac{\alpha n+\beta}{n^2}=\frac{\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n^2}}{1}\to 0$,

7.) $a_n=\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{1+1/n}\geq n/2$ unbeschränkt
Regel: P,Q Polynome vom Grad p,q mit höchsten

Koeffizienten α_p,β_q, dann gilt $\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}0: p<q\\ \frac{\alpha_p}{\beta_q}: p=q\\ unb.: p>q\end{cases}$

8.) Cauchykriterium? $a_n=\sqrt{n}$.

$\varepsilon>0$. Wähle $n_0(\varepsilon)>$? $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, $m=n+1$, $|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon$,

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n+1<\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{n}+n \Leftrightarrow 1-\varepsilon^2<2\varepsilon\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}>\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ldots$

$\sqrt{n+10}-\sqrt{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n+10<\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{n}+n \Leftrightarrow 10-\varepsilon^2<2\varepsilon\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}>\frac{10-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ldots$

??? $n_0(\varepsilon)>\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2\ldots$ # $\left(\frac{10-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$ #... aber n,m nicht beliebig!???

$\sqrt{n}$ ist nicht beschränkt $\Rightarrow a_n=\sqrt{n}$ konvergiert nicht!

9.) $a_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ für $z\in\mathbb{C}$, $z\neq1$, $n\in\mathbb{N}$,

$z=1 \Rightarrow a_n=n+1\to\infty$

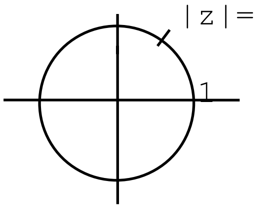
$|z|<1 \Rightarrow |z^n-0|=|z^n|\to0\ (n\to\infty) \Rightarrow a_n\to\frac{1}{1-z}\ (n\to\infty)$,

$a_n\to a \Rightarrow a_n-a_{n-1}=z^n\to a-a=0 \Leftrightarrow |z|<1$

10.) *//**S1.6.2**(802) Vor. Sei $z_1,z_2\in C$ dann 2.) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$//*

$b_n=z^n$ $\quad |z|<1 \Rightarrow b_n\to0$, $|z|>1 \Rightarrow |b_n|\to\infty$

$|z|=1$ $\quad |z|=1$, Ann. $\exists\ b:=\lim_{n\to\infty} b_n$, $|b_n|=1 \Rightarrow b\neq0 \Rightarrow$



$z=\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{b_{n+1}}{b_n}\to b/b=1$

11.) $a>0$, $a_n=\sqrt[n]{a}\underbrace{\to}_{n\to\infty}1$

Bew: $a\geq1$: $1\leq\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{n}\underbrace{\to}_{Bsp\,4.)\ n\to\infty}1$

$0<a<1$: $1/\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\underbrace{1/a}_{>1}}\underbrace{\to}_{n\to\infty}1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}=\underbrace{\to}_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{1/\sqrt[n]{a}}_{\underset{n\to\infty}{\to}1}}1$

A2.1.12 Untersuche die durch $a_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\frac{n^2}{n^2+1}$ definierte Folge $(a_n)_{n=1}^{¥}$ auf Konvergenz.

Lös: Wenn a_n konvergiert $\exists$ ein $n_0(\varepsilon)$, sodass $\forall\ \varepsilon>0$ gilt:

$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)\ \forall\ p\in\mathbb{N}$, insbesondere $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$.

$|a_{n+1}-a_n|=\left|\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\frac{n^2}{n^2+1}\right|=$

$\underbrace{\left|\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right|}_{1} \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}\right| \underbrace{\geq}_{|z|>|\mathrm{Im}(z)|} \left|\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}\right)\right| =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4}{5}>\varepsilon \Rightarrow$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

S2.1.3(1255)Vor:Seien $(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus $\mathbb{R}$ mit $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $b_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} b$, $\alpha\in\mathbb{R}$

#beachten: Vor gelten für alle folgenden Punkte!!!!!!!!!!

Beh:

1.) $a_n\leq\alpha$ $(\geq\alpha)$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N} \Rightarrow a\leq\alpha$ $(a\geq\alpha)$

Bew:zu $a_n\leq\alpha$..$a_n\rightarrow a$, Annahme $a>\alpha$, Wähle $\varepsilon_0:=\frac{a-\alpha}{2}>0 \Rightarrow$

$\exists\, n_0(\varepsilon_0):|a_n-a|<\varepsilon_0\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow a_n=a_n-a+a-\alpha+\alpha=a_n-a+2\varepsilon_0+\alpha\geq 2\varepsilon_0+\alpha-|a_n-a|\geq$
$2\varepsilon_0+\alpha-\varepsilon_0=\alpha+\varepsilon_0\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $\Rightarrow a_n\leq\alpha$

Bem: $a_n<\alpha$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N} \not\Rightarrow a<\alpha$ sondern $a\leq\alpha$

2.) $a_n\leq b_n$ $(a_n\geq b_n)$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N} \Rightarrow a\leq b$ $(a\geq b)$

Bew:zu $a_n\leq b_n$ ...Annahme $a>b$, $\varepsilon_0:=\frac{a-b}{3}>0 \Rightarrow$

$\exists\, n_0(\varepsilon):|a_n-a|<\varepsilon_0,\ |b_n-b|<\varepsilon_0\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$
$a_n-b_n=a_n-a+a-b-(b_n-b)=a_n-a+3\varepsilon_0-(b_n-b)\geq 3\varepsilon_0-|a_n-a|-|b_n-b|>3\varepsilon_0-\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0 \Rightarrow$
$a_n>b_n+\varepsilon_0\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow a\leq b$

3.) $a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ und $a=b \Rightarrow c_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $b_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} b=a$

Bew: $a-c_n=a-a_n+\underbrace{a_n-c_n}_{\leq 0}\leq a-a_n\leq|a_n-a|$,

$c_n-b=\underbrace{c_n-b_n}_{\leq 0}+b_n-b\leq b_n-b\leq|b_n-b|=|b_n-a| \Rightarrow$

$|c_n-a|\leq\max\{|a_n-a|,|b_n-a|\}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow c_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$

Bsp:1.) $a_n=-1/n$, $-1/n<0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}(-1/n)=0$

2.) $a_n=\frac{n^2+3n}{2n^2-2n+1}=\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 1/2$

3.) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1})+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\underbrace{=}_{3.\text{bin}formel}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $\quad 0\leq a_n<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon):=[\frac{1}{e^2}]+1$

A2.1.13

Zeige oder widerlege: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $a\in\mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $([a_n])_{n=1}^{\infty}$ gegen $[a]$. ($[x]$: das größte Ganze von x).

*//**S2.1.2** (1250) (z_n), $z_n \overset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} z$, $z,z_n\in C$. 2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge,//*
// d.h. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0$//

Lös:Aussage gilt nicht! Bsp:$a_n=\frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, aber

$\lim\limits_{n\to\infty} [a_n]$ existiert nicht, denn $[a_n]=\begin{cases}-1 \text{ falls } n \text{ ungerade}\\ 0 \text{ falls } n \text{ gerade}\end{cases}$,

$[a_{n+1}]-[a_n] \not\to 0 \quad (n\to\infty)$

Genauere Begründung: Zu $\varepsilon>0$ wähle $n_0=[1/\varepsilon]+1 \Rightarrow$
$|a_n-0|= 1/n\leq 1/n_0<\varepsilon \ \forall\ n\geq n_0$, sowie $|[a_{n+1}]-[a_n]|=1 \ \forall\ n \Rightarrow$
$([a_n])_{n=1}^{\infty}$ keine Cauchy Folge $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2\ 2)}$ $([a_n])_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht oder

$[a_{n+1}]-[a_n]\not\to 0 \quad (n\to\infty)$

A2.1.14 Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n=\frac{n^5+n^4-3n^2}{2n^5-3n+5}$

Lös: $\frac{n^5+n^4-3n^2}{2n^5-3n+5}=\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^3}}{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^5}}\to 1/2$

b) $a_n=\frac{n^5-(n^3+2)(n^2+n)}{7n^4+2}$

Lös: $a_n=\frac{-n^4-2n^2-2n}{7n^4+2}=\frac{-1-2\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}-2\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}{7+2\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}\underbrace{=}_{n\to\infty}$

$\frac{-1-2\cdot 0-2\cdot 0}{7+2\cdot 0}=-1/7$

c) $a_n=\frac{n^2}{2n+1}$

*//**S2.1.2** (1250) $(z_n)\in\mathbb{C}$, $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z, z_n\in C$. 1.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt//*

Lös: $a_n=\frac{n^2}{2n+1}\geq\frac{n^2}{2n+n}=n/3 \ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht beschränkt
sonst $\exists\ M>0: a_n\leq M \ \forall\ n \Rightarrow n\leq 3M \ \forall\ n\in\mathbb{N}$ Widerspruch
$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.\ 2.1.)}$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert

d) $a_n=\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

*//**A2.1.13** a) (1256) Geg: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n\geq 0 \ \forall\ n\in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in R$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.//*

Lös: $a_n=\sqrt{n}\,\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\underbrace{=}_{A2.1.13\ a)}\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=1/2$$

$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}1/n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}1+1/n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}=\sqrt{1}=1$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}+1=2$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1/2$

e) $a_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})$ mit $a,b>0$

Lös: $a_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})\,\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=\frac{\sqrt{n}(n+a-(n+b))}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=$

$$(a-b)\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+a/n}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1+b/n}}_{\to 1}}\to\frac{a-b}{2}$$

f) $a_n=nx^n$ für ein $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<1$

Lös: Vermutung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Setze $h=\frac{1}{|x|}-1>0$ $\Rightarrow$ $|x|=\frac{1}{1+h}$. Sei $\varepsilon>0$ baf.

Wähle $n_0=\left[\frac{2}{h^2\epsilon}\right]+2$ $\Rightarrow$ $|a_n-0|=n|x|^n=\frac{n}{(1+h)^n}=\frac{n}{\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{k}{n}h^k}_{\geq 0}}\leq$

$$\frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\sum\limits_{v=3}^{n}\binom{k}{n}h^v}<\frac{2}{h^2}\frac{1}{n-1}$$

$$\leq\frac{2}{h^2}\frac{1}{n_0-1}<\frac{2}{h^2}\frac{1}{\left[\frac{2}{h^2 e}\right]+2-1}=\frac{\frac{2}{h^2}}{\underbrace{\left[\frac{2}{h^2\varepsilon}\right]+1}_{>\frac{2}{h^2\varepsilon}}}<\varepsilon\quad\forall\ n\geq n_0 \text{ da } n_0>\left[\frac{2}{h^2 e}\right]+1\ \underbrace{\Rightarrow}_{D2.1.1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ und $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert

Bem: Für beliebig kleine ε wähle $n_0=\left[\frac{2}{h^2\epsilon}\right]+\underbrace{c}_{>2}$

*// **S2.1.2** (1250) (a_n), $a\in\mathbb{R}$, $a_n\xrightarrow{n\to\infty} a$.//*

// 2.) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0$//

g) $a_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$ $\Rightarrow$ $|a_{n+1}-a_n|=\frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1}\underbrace{\to}_{n\to\infty}1+1=2$ $\Rightarrow$ $a_{n+1}-a_n\ \underbrace{\not\to}_{n\to\infty}\ 0$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2\ 2.)}$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht

h) $a_n=\frac{n^4-i}{i-n^4}=\underbrace{\to}_{n\to\infty}\frac{1-in^{-4}}{in^{-4}-1}\ \frac{1-0}{0-1}\ \underbrace{\overset{n^{-4}\xrightarrow{n\to\infty}0\ \Rightarrow in^{-4}\xrightarrow{n\to\infty}0}{\to}}_{n\to\infty}=-1$

i) $b_n=\left(\frac{i}{2}\right)^n$

Lös: $|b_n|=|(i*\frac{1}{2})^n|=|i|^n|\frac{1}{2}|^n=1^n*\underbrace{\to}_{n\to\infty}1*0=0$

A2.1.15

a) Vor: Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

*//**D2.1.1** (1200) $(z_n)=(z_n)_n^{\infty}$ aus K konvergent $\Leftrightarrow \exists\ z\in K$:*
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$. //

Bew: Nach Vor $\exists\ k>0: |b_n|\leq k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$ mit **D2.1.1.**

Sei $\varepsilon>0$ baf, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow$

Zu $\bar{e}=\varepsilon/k>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n|=|a_n-0|<\bar{e}=\varepsilon/k\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$

$|a_n b_n-0|=\underbrace{|a_n|}_{<e/k}\ \underbrace{|b_n|}_{<k}<k\underbrace{|a_n|}_{<e/k}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$

(Es wurde also gezeigt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n b_n-0|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$)

b) Es sei $q\in[0,1)$ und $0\leq x_{n+1}\leq q x_n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$. Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

*//**S2.1.3** (1255) $(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus R: $a_n\to a, b_n\to b, (n\to\infty)$//*
//3.) $a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b \Rightarrow c_n\to a\ (n\to\infty)\ \ a_n\to a,\ b_n\to b=a$//

Bew: Beh: (.) $x_n\leq q^n x_0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ $(x_n=q^0 x_n\leq q x_{n-1}\leq q^2 x_{n-2}\leq\ldots\leq q^n x_0)$ (..) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

(.) Induktion nach n

n=0: $x_0\leq x_0=\underbrace{q^0}_{<1} x_0$

$n\to n+1$: $x_{n+1}\leq q \underbrace{x_n}_{\text{IndHyp}\leq q^n x_0} \leq q q^n x_0=q^{n+1}x_0$

(..) Nach (.) gilt: $\underbrace{0}_{a_n}\leq\underbrace{x_n}_{c_n}\leq\underbrace{q^n x_0}_{b_n}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\ x_0 \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} q^n}_{=0,\ \text{da}|q|<1} = x_0 * 0=0=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \underbrace{\Rightarrow}_{\text{S2.1.3 3.)}} x_n=c_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

A2.1.16 Definiere für $p\in\mathbb{N}_0$ die Folge $(S_n^p)_{n=1}^{\infty}$ durch $S_n^p=\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

a) Beweise: $\sum\limits_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu} S_n^{p+1-\nu}=(n+1)^{p+1}-1$.

*//**S1.7.1** (901) $m\leq n\in N$, $a_k\in C$, $m\leq k\leq n$ $\quad\sum\limits_{k=m,\,n\geq m}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_m-a_{n+1}$ //*

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C\ \wedge\ n,m,k\in N_0,\ j\in N$://*

// 6.) $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$, $(1+z)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k z^{n-k}$//

Hinweis: Beachte, dass $(x+1)^{p+1}-x^{p+1}=\sum\limits_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}x^{p+1-\nu}$ für $x\in\mathbb{R}$. $\binom{p+1}{k}$

Bew: $(x+1)^{p+1}-x^{p+1}=\sum\limits_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}x^{p+1-k}-x^{p+1}=\sum\limits_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}x^{p+1-k} \Rightarrow$

$(n+1)^{p+1}-1 \underbrace{=}_{S1.7.1} \sum\limits_{k=1}^{n}((k+1)^{p+1}-k^{p+1})=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{\nu=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}k^{p+1-\nu}-k^{p+1}=$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}k^{p+1-\nu}=\sum_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}k^{p+1-\nu}=\sum_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}S_n^{p+1-\nu}.$$

b) Untersuche die Folgen (.) $\left(\frac{S_n^p}{n^{p+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ und (..) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k}\right)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz

Lös: (.) Bew von $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$ durch Induktion nach p

(Wie errät man $\frac{1}{p+1}$??)

P=0: $S_n^0=\sum_{k=1}^{n}k^0=n \Rightarrow \frac{S_n^0}{n}\underbrace{\to}_{n\to\infty}1$

p p+1: Es gelte $\frac{S_n^k}{n^{k+1}}\to\frac{1}{k+1}$ für $0\le k\le p$ mit $p\in\mathbb{N}_0$.

Z.z. $\frac{S_n^{p+1}}{n^{p+2}}=\frac{1}{p+2}$. Nach Teil a) $\sum_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu}S_n^{p+1-\nu}=(n+1)^{p+1}-1$ gilt

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+2}}\left((n+1)^{p+2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+2}}\sum_{k=1}^{p+2}\binom{p+2}{k}S_n^{p+2-k}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n^{p+1}}{n^{p+2}}(p+2)+\sum_{k=2}^{p+2}\binom{p+2}{k}\underbrace{\frac{S_n^{p+2-k}}{n^{p+3-k}}}_{\to\frac{1}{p+3-k}}\underbrace{\frac{1}{n^{k-1}}}_{\to 0}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{p+1}}{n^{p+2}}=1/(p+2) \Rightarrow \text{Beh}$$

$$\#\frac{S_n^{p+2-(2\dots p+2)}}{n^{p+3-(2\dots p+2)}}=\frac{S_n^{p-(0\dots p)}}{n^{p-(1\dots p+1)}}=\frac{S_n^{p\dots 0}}{n^{(p+1)\dots 1}}=\frac{S_n^{\overbrace{p\dots 0}^{0\le 0\dots p\le p}}}{n^{(p+1)\dots 1}}$$

$$\#\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+2}}((n+1)^{p+2}-1)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p+2}-\underbrace{\frac{1}{n^{p+2}}}_{\to 0}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^{p+2}\right) \to 1$$

(..)Es gilt: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{S_n^2}{n^3}\xrightarrow{n\to\infty} 1/3$ und $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n}=$

$\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\xrightarrow{n\to\infty} 1/3$, also nach Einschließung $\xrightarrow{n\to\infty} 1/3$

(1259) $\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=$

$\frac{n^3}{3}\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$

A2.1.17

a) Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0:=3$ und $a_n:=\sqrt{8+2a_{n-1}}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

*//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//Vor: (z_n), (w_n), $z,w\in\mathbb{C}$, $z_n\xrightarrow{n\to\infty} z$, $w_n\xrightarrow{n\to\infty} w$ 5.) $\lim_{n\to\infty}(z_n+w_n)=z+w$//

*//**A2.1.4** (1205) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n\ge 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$. $\sqrt{a_n}\lim_{n\to\infty}=\sqrt{a}$ //*

Lös: Wenn $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, etwa $a=\lim_{n\to\infty} a_n$, dann folgt

$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{8+2a_{n-1}}\underbrace{=}_{A2.1.4}\sqrt{8+2a}\Rightarrow a^2=8+2a\Rightarrow a^2-2a-8=0\Rightarrow$

$a=4$, $a=-2$.

Vermutung $\lim_{n\to\infty} a_n=4$. Beachte, dass für $n\in\mathbb{N}$ gilt

$|a_n-4|=|\sqrt{8+2a_{n-1}}-4|\frac{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4}{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4}=\frac{|8+2a_{n-1}-16|}{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4}=$

$\frac{2|a_{n-1}-4|}{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4}\le\frac{2|a_{n-1}-4|}{4}=\frac{|a_{n-1}-4|}{2}$.

Also gilt $|a_n-4|\le\frac{1}{2^n}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ (Beweis durch Induktion)

n=0: $|a_0-4|=|3-4|=\frac{1}{2^0}$

n n+1:Es gelte $|a_n-4|\le\frac{1}{2^n}$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$|a_{n+1}-4|\le\frac{1}{2}|a_n-4|\le\frac{1}{2}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow |a_n-4|\xrightarrow{n\to\infty}0,\ \lim_{n\to\infty} a_n=4$$

b) Es seien $a,b\in\mathbb{R}$. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0=a$, $a_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$ für n>1. Zeige, dass a_n konvergiert und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lös: # $a_2=\frac{a_1+a_0}{2}=\frac{1}{2}(b+a)$

$a_3=\frac{\frac{1}{2}(b+a)+b}{2}=\frac{1}{4}(3b+a)$, $a_3-a_2=\frac{1}{4}(b-a)=(-\frac{1}{2})^2(b-a)$

* $a_4=\frac{\frac{1}{4}(3b+a)+\frac{1}{2}(b+a)}{2}=\frac{1}{8}(5b+3a)$, $a_4-a_3=\frac{1}{8}(-b+a)=-\frac{1}{8}(b-a)=(-\frac{1}{2})^3(b-a)$

Es gilt $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}-a_n=(-\frac{1}{2})(a_n-a_{n-1})$ $\Rightarrow$

$a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n(a_1-a_0)=(-\frac{1}{2})^n(b-a)$.

Bew durch Induktion wie im Teil a) $\Rightarrow$

Für $n\in\mathbb{N}$ gilt $a_n=a_n-a_0+a_0=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+a=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2})^n(b-a)+a=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})}(b-a)+a$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(b-a)+a=\frac{2b+a}{3}$ $(n\to\infty)$

A2.1.19 Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme ggf den Grenzwert:

a) $a_n=\frac{(3n+1)^3}{(2n-1)(2-3n)^2}$

b) $a_n=n^2x^n$ für $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<1$

c) $a_n=n^2(n-\sqrt{n^2-1})$

d) $a_n=\frac{a^{2n}-1}{a^{2n+1}+1}$ für $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

A2.1.20

a) Zeige: Zu jedem $x\in\mathbb{R}$ existiert eine Folge $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $r_n\in\mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} r_n = x$.

b) Es sei $\mathbb{F}$ die Menge aller Folgen aus $\mathbb{R}$,
d.h. $\mathbb{F} = \{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R} \ \forall \ n \in \mathbb{N} \}$. Auf $\mathbb{F}$ sei folgende Relation definiert: $(a_n)_{n=1}^{\infty} \sim (b_n)_{n=1}^{\infty} :\Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge.
Zeige, daß $\sim$ auf $\mathbb{F}$ eine Äquivalenzrelation ist und gebe die Äquivalenzklasse einer konstanten Folge an.