D4.4.5 (2560)
Vor: $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$
f besitzt ein globales Maximum (Minimum) bezüglich einer $\tilde{M}\subset M$ in $x_0\in\tilde{M}$
falls gilt: $f(x_0)\geq f(x)$ $(f(x_0)\leq f(x))$ $\forall$ $x\in\tilde{M}$.

//**D1.3.4** Sei X eine beliebige Menge.
//Eine Abbildung $d: X\times X\to\mathbb{R}$, heißt Metrik auf X, wenn für
//beliebige $x,y,z\in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:
//1.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
//2.) Symmetrie : $d(x,y)=d(y,x)$
//3.) Dreiecksungleichung: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$
//**S1.3.3 Positive Definitheit**
//$d: X\times X\to\mathbb{R} \Rightarrow d(x,y)\geq 0$
//**D1.3.5**
//(X,d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist.
//***D4.1.1***(2200) *Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei //*
// $\overset{o}{U}_\delta(x_0):=U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R}/0<|x-x_0|<\delta\}$. //
//3.) $x_0\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.//
//4.) M' sei die Menge aller HP von M und //
// $\overline{M}:=M\cup M'$ die abgeschlossene Hülle von M.
// (*) M heißt abgeschlossen: $\Leftrightarrow M=\overline{M} \Leftrightarrow M'\subset M$.
// # $M=\overline{M}=M\cup M' \Leftrightarrow M'\subset M$
//Andere Formulierung://
//(**) Eine Teilmenge $M\subseteq\mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn der //
// Grenzwert jeder konvergenten Folge (x_n) mit $x_n\in M$ selbst //
// in M liegt.//
//5.) M heißt kompakt:$\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt//
//Andere Formulierung://
// Eine Teilmenge $M\subseteq\mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn jede Folge in M eine //
// konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder zu M //
// gehört//

S4.4.9(2561) Globale Extrema
Vor: $M\subset\mathbb{R}$ & M kompakt
Aussage: $\exists \min\limits_{z\in M} f(z)=\min f(M)\in\mathbb{R}$ und $\exists \max\limits_{z\in M} f(z)=\max f(M)\in\mathbb{R}$, d.h.

$\exists\ x_1,x_2\in M$ mit $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\ \forall\ z\in M$.

//**S1.3.1** (501) *Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*

// 1.) $\overleftarrow{s}$ = supT: $\Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und//

// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T//

// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T$: $t\le\overleftarrow{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$//

//**D4.1.1** (2200)

//5.) M kompakt $\Leftrightarrow$*

// Jede Folge aus M besitzt eine //konvergente Teilfolge, deren

// Grenzwert wieder zu M gehört

// ($\forall\ (z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n\in M\ \exists\ (z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$

// $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}=z\in M$)

//**S4.3.3** (2409) Folgenstetigkeit

// Genau dann ist $f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $z_0\in D$, wenn für jede Folge

// (z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} z_0$ auch $f(z_n)\underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} f(z_0)$ gilt.

Bew: f(M) kompakt, d.h. beschränkt $\Rightarrow\ \exists\ y_0:=\sup\{f(x)\in\mathbb{R}\,|\,x\in M\}=\sup f(M)$

$\underset{S1.3.1}{\underbrace{\Rightarrow}}\ \exists\ y_n\in f(M),\ y_n\underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} y_0 \Rightarrow y_n=f(x_n),\ y_n\underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} y_0,\ x_n\in M,$

$|x_n| \underset{Vor: M\ kompakt}{\le} K\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$

$\underset{D4.1.15*)}{\underbrace{\Rightarrow}}\ \exists\ (x_{n_\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ mit $x_{n_\nu}\to x_0\in M \underset{f\ stetig\ in\ x_0}{\underbrace{\Rightarrow}} \underset{\to y_0}{\underbrace{y_{n_\nu}}}=f(x_{n_\nu})\underset{S4.3.3}{\underbrace{\to}} f(x_0)=y_0=\max f(M)$

//**S4.3.3** (2409) Folgenstetigkeit

// Genau dann ist $f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $z_0\in D$, wenn für jede Folge

// (z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} z_0$ auch $f(z_n)\underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} f(z_0)$ gilt.

#Eigene Formulierung in Ahnlehnung verschiedener Quellen:

#Bew: $y_0:=\sup\{f(z)\in\mathbb{R}\,|\,z\in M\}=\sup f(M)\Rightarrow y_0\in\mathbb{R}$ oder $y_0=\infty$ (wenn M nach

oben nicht beschränkt) $\underset{S1.3.1}{\underbrace{\Rightarrow}}\ y_0-\frac{1}{n}$ ist keine obere Schranke

$\Rightarrow\ \forall\ n$: $\exists\ x_n\in M$ mit $f(x_n)>y_0-\frac{1}{n}$ und $y_n=f(x_n)\underset{n\to\infty,\,1/n\to 0}{\underbrace{\to}} y_0$,

$\underset{D4.1.15*)}{\underbrace{\Rightarrow}}\ \exists$ Teilfolge $(x_{n_\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ mit $x_{n_\nu}\underset{M\ abgeschlossen}{\underbrace{\Rightarrow}} x_0\in M$ mit $y_0=f(x_0)$

$\underset{f\ stetig\ in\ x_0}{\underbrace{\Rightarrow}}\ \underset{\to y_0}{\underbrace{y_{n_\nu}}}=f(x_{n_\nu})\underset{S4.3.3}{\underbrace{\to}} f(x_0)=y_0=\max f(M)$

Bez: Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall
(Bsp [a,b]) heißt kompakt.

Bem: (.) Die Vor „f stetig" und „Intervall ist abgeschlossen und beschränkt" sind wesentlich.

(..) Dann gilt: $f([a,b])=[\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)]$=abgeschlossenes Intervall

Bsp: (.) $f(x)=x$ auf $\underset{offen!}{\underbrace{(0,1)}}$, $\sup\limits_{(0,1)} f(x)=1$, max existiert nicht.

(..) $f(x)=1/x$, $[1,\infty)$, Msatz nicht anwendbar, $\max\limits_{x\in[1,\infty]} f(x)=f(1)$,
min f(x) existiert nicht (0 wird nicht angenommen)

(...) f(x) = $\begin{cases} 0 \; falls \; x \in R/Q \cap [0,1] \\ p \; falls \; x = p/q \; mit \; p \in Z, q \in N \; und \; teilerfrem\,d \end{cases}$

min=0, max existiert nicht, nicht stetig.

A4.4.14 Gegeben sei eine stetige Funktion f: R→R. Es gelte

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Zeige, dass dann $\underbrace{\max}_{x\in R} |f(x)|$ existiert

//**S4.4.7**(2560) Vor: M⊂R oder M⊂C & M kompakt, f:M→ R stetig auf M.

//Beh:∃ $\min_{z\in M} f(z) = \min f(M) \in R$ und ∃ $\max_{z\in M} f(z) = \max f(M) \in R$, d.h.

// ∃ $z_1, z_2 \in M$ mit $f(z_1) \le f(z) \le f(z_2)$ ∀ z∈M.

Lös:Fall 1:Wenn f(x)=0 ∀ x∈R, max|f(x)|=0

Fall 2:∃ $\tilde{x} \in R$ mit $|f(\tilde{x})| > 0$ ⇒

∃ $x_2 > \tilde{x}$ mit $|f(x)| \le \frac{|f(\tilde{x})|}{2}$ ∀ $x \ge x_2$ &

∃ $x_1 < \tilde{x}$ mit $|f(x)| \le \frac{|f(\tilde{x})|}{2}$ ∀ $x \le x_1$

$\underset{S4.4.7,[x_1,x_2]kompakt}{\Rightarrow}$ ∃ m=max|f(x)|, |f(x)| ist stetig in $x \in [x_1, x_2]$) ⇒

∃ $m = \max|f(x_0)|$ für $x_0 \in [x_1, x_2]$ $\underbrace{\Rightarrow}_{m \ge |f(\tilde{x})|}$ |f(x)|≤m ∀ x∈R? ⇒ m=max|f(x)| ∀ x∈R

D4.4.6(2563) Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $M\subset K, f:M\to K$ heißt gleichmäßig stetig auf $M :\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M: |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

Erläuterung: Egal, welche Punkte $z_1,z_2\in M$ gewählt werden, muß zu ε immer $|z_1-z_2|<\delta_\varepsilon$ gelten, also „ nur 1 Wert δ_ε für ganz M ".
Unterschied zu stetig siehe Bsp 2
Im 2. Bsp immer das gleiche δ_ε, von x_0 unabhängig

Bem: $f:M\to K$ ist gleichmäßig stetig auf $M \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ (δ unabhängig von $z\in M$) mit: $\forall\ z_0\in M,\ \forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$ gilt $f(z)\in U_\varepsilon(z_0)$.

#Vergleich Stetigkeit
#**D4.3.1**
Sei $D\subset \mathbb{R}$. Dann heißt $f: D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in D:\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(x)\in U^{\varepsilon}(f(x_0))\ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$
f heißt stetig auf $A\subset D:\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig und es gilt.
*** $\forall\varepsilon>0\ \forall\ x_0\in D\ \exists\ \delta_{\varepsilon,x_0}\ \forall\ x\in A: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Animation zu gleichmäßige Stigkeit Internet:
https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichm%C3%A4%C3%9Fige_Stetigkeit

Bsp:1.) $f(z):=z^2\ \forall\ z\in \mathbb{C}$ mit $|z|\le R$.
$|f(z_1)-f(z_2)|=|z_1^2-z_2^2|=|z_1-z_2||z_1+z_2|\le|z_1-z_2|2R<\varepsilon$ für
$|z_1-z_2|<\delta:=\dfrac{\varepsilon}{2R} \Rightarrow f(z)=z^2$ gleichmäßig stetig auf $\overline{U_R(O)}$.

2.) $f(x):=1/x$, ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0,\infty)$.
Anm: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ (δ unabhängig von x):
$\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|=\dfrac{|x_2-x_1|}{x_1x_2}<\varepsilon\ \forall\ x_1,x_2\in(0,\infty),\ |x_2-x_1|<\delta$.
Wähle $x_1,x_2\in(0,\infty)$ mit $\delta>|x_1-x_2|\ge\delta/2$.
$\delta/2\le|x_1-x_2|\le\varepsilon x_1x_2\ \forall\ 0<x_1<x_2 \underset{x_1\to 0_+}{\Rightarrow} \#\varepsilon x_1x_2 \underset{x_1\to 0_+}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \delta\to 0\# \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$
Kein von x unabhängiges δ zu finden!

//S1.2.1(406) Vor: K angeordnet, a,b∈K Beh: 6.)|a+b|≤|a|+|b|//

3.) $f(z)=z^3,\ |z|\le R,\ |f(z_1)-f(z_2)|=|z_1^3-z_2^3|=$
$|z_1^3+z_1^2z_2+z_1z_2^2-z_2z_1^2-z_1z_2^2-z_1^3|=|z_1-z_2||z_1^2+z_1z_2+z_2^2|$
$\underset{S1.2.1}{\le}|z_1-z_2|3R^2\ \forall\ z,z\in\overline{U_R(O)}$.
Sei $\varepsilon>0: \Rightarrow |z_1^3-z_2^3|\le|z_1-z_2|3R^2<\varepsilon\ \forall\ z_1z_2\in\overline{U_R(O)}\ \&\ |z_1-z_2|<\delta:=\dfrac{\varepsilon}{3R^2}$

S4.4.10(2564)
Vor: Sei $M\subset\mathbb{K}$ & M kompakt(d.h. abgeschl& beschränkt) $f:M\to\mathbb{K}$ stetig auf M.
Aussage: f ist gleichmäßig stetig auf M.

//**D4.4.6**(2563) Gleichmäßige Stetigkeit
//Sei $M\subset\mathbb{K}$, $f:M\to\mathbb{K}$ heißt gleichmäßig stetig auf M:⇔
//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$
//***S4.3.3****(2409)Folgenstetigkeit*
// *Genau dann ist* $f=D\to\mathbb{K}$ *stetig in* $z_0\in D$, *wenn für jede Folge*
// (z_n) *in D mit* $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ *auch* $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(z_0)$ *gilt.*
//***D4.1.1****(2200)*
// *4.) M' sei die Menge aller HP von M und //*
// $\overline{M} := M\cup M'$ *die abgeschlossene Hülle von M.*
// *(*)M heißt abgeschlossen:* $\Leftrightarrow M=\overline{M} \Leftrightarrow M'\subset M$.
// # $M=\overline{M}=M\cup M' \Leftrightarrow M'\subset M$
// *(**)Eine Teilmenge* $M\subseteq\mathbb{R}$ *heißt abgeschlossen, wenn der*
// *Grenzwert jeder konvergenten Folge* (x_n) *mit* $x_n\in M$ *selbst*
// *in M liegt.*
// *5.)M heißt kompakt:⇔ M ist abgeschlossen und beschränkt//*
//***S2.4.1****(1502)Bolzano Weierstrass (BW)//*
//*Vor:Sei* $(a_n)\subset\mathbb{R}$ *beschränkt//*
//*Beh:*(a_n) *hat einen HW* $a\in\mathbb{R}$ *und eine gegen a konvergente//*
// *Teilfolge.*$(-k\le a_n\le k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N})$*//*
Bew:Annahme f nicht gleichmäßig stetig auf M ⇒
Negation von Def Stetigkeit:
$\exists\ \varepsilon_0>0\ \forall\ \delta_\varepsilon>0\ \exists\ z,z'\in M:\ |z-z'|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z)-f(z')|\ge\varepsilon_0 \Rightarrow$
$\exists\ \varepsilon_0>0\ \forall\ \delta=1/n,\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ z_n,z'_n\in M$ mit $|z_n-z'_n|<1/n \Rightarrow |f(z_n)-f(z'_n)|\ge\varepsilon_0$

$$\underset{M\text{ beschränkt und }S2.4.1}{\overset{(z_n),(z_n')\text{ beschränkt}}{\Longrightarrow}} \exists\ (z_{n_\nu})_{\nu=1}^{\infty},(z_{n_\nu}')_{\nu=1}^{\infty} \text{ mit } z_{n_\nu}, z_{n_\nu}' \underset{\nu\to\infty}{\to} z_\infty,\ z_\infty\in M$$

$$\underset{f\text{ stetig in }z_\infty}{\overset{S4.3.3}{\Longrightarrow}} f(z_{n_\nu})\&f(z_{n_\nu}') \underset{\nu\to\infty}{\to} f(z_\infty) \Rightarrow$$

$$0<\varepsilon_0\le |\underbrace{f(z_{n_\nu})-f(z_{n_\nu}')}_{\ge\varepsilon_0>0\,\forall k}| \underset{\forall k}{\le} |f(z_{n_k})-f(z_{n_k}')|\le|f(z_{n_k})-f(z_\infty)|+|f(z_\infty)-f(z_{n_k}')| \underset{k\to\infty}{\overset{f\text{ stetig}}{\longrightarrow}} 0$$

⇒ Widerspruch
Bem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ⇒ f gleichmäßig stetig
$f([a,b])=[\min f,\ \max f]$

S4.4.11(2565) Vor: $M\subset K$ & M beschränkt, $f:M\to K$ gleichmäßig stetig auf M.
Beh: $f(M)$ ist beschränkt, d.h. $|f|$ ist auf M beschränkt
Zusatz: f läßt sich eindeutig stetig und gleichmäßig stetig von M auf $\overline{M}$ (kompakt) fortsetzen. Damit ist f auf M beschränkt.

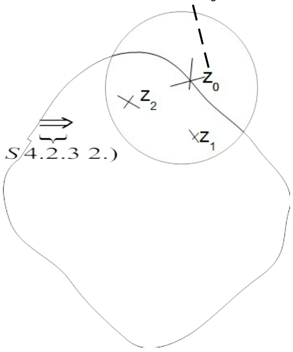
*//**D4.4.5** (2562) Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Sei $M\subset R$ oder $M\subset C$. $f:M\to C$ heißt gleichmäßig stetig auf M: $\Leftrightarrow$ //
// $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0\ \ \forall\ z_1,z_2\in M$: $|z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$
//Bem: $f:M\to C$ ist gleichmäßig stetig auf $M \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$//
// (δ unabhängig von $z\in M$) mit wenn $\forall\ z_0\in M$, $\forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$ gilt//
// $f(z)\in U_\varepsilon(z_0)$.//
*//**S4.2.3**(2310) Sei $M\subset K$, $z_0\in M'$, $f:M\to K$//*

//Beh:2.) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in R \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

*//**D4.1.1'**(2002) $z_0\in C$, $\delta>0$, $M\subset C$, $M\neq\emptyset$://*
// $\overset{o}{U}_\delta(z_0) := U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in C \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$.//

//2.) $z_0\in C$ heißt Häufungspunkt (HP) von M: $\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$.
// M' sei die Menge aller HP von M und $\overline{M} := M\cup M'$ die abgeschlossene//
// Hülle von M.

Bew: Sei $z_0\in M'\setminus M$. Nach Vor. gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0$ (unabhängig von z),
$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon\ \ \forall\ z_1,z_2\in M$, $|z_1-z_2|<\delta \Rightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0: |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$, $\forall\ z_1,z_2\in M\cap\overset{o}{U}_{\delta/3}(z_0)$



$\underset{S4.2.3\ 2.)}{\Rightarrow}$

$\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) =: f(z_0)\ \ \forall\ z_0\in M'\setminus M$.
Sei $f:\overline{M}\to K$ wie oben definiert,
$z_1^*, z_2^*\in\overline{M}$ mit $|z_1^*-z_2^*|<\delta/3 \Rightarrow$
Zu z_1^*, $\exists\ z_1\in M\cap\overset{o}{U}_{\delta/3}(z_1^*)$: $|f(z_1)-f(z_1^*)|<\varepsilon/2$

Falls $z_1^*\in M$, dann sei $z_1=z_1^*$,
Falls $z_1^*\in M'\setminus M$, so gilt $f(z_1^*)=\lim\limits_{z\to z_1^*} f(z)$, $z\in M$

Zu $z_2^*\ \exists\ z_2\in M\cap\overset{o}{U}_{\delta/3}(z_2^*)$, $|f(z_2)-f(z_2^*)|<\varepsilon/2 \Rightarrow$

$|z_1-z_2|\leq\underbrace{|z_1-z_1^*|}_{<\delta/3}+\underbrace{|z_1^*-z_2^*|}_{<\delta/3}+\underbrace{|z_2^*-z_2|}_{<\delta/3}<3\delta/3=\delta \underset{Vor., D4.4.5}{\Rightarrow}$

$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon \Rightarrow$

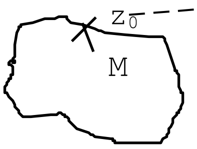
$|f(z_1^*)-f(z_2^*)|\leq\underbrace{|f(z_1^*)-f(z_1)|}_{<\varepsilon/2}+\underbrace{|f(z_1)-f(z_2)|}_{<\varepsilon}+\underbrace{|f(z_2)-f(z_2^*)|}_{<\varepsilon/2}<2\varepsilon \Rightarrow |f(z_1^*)-f(z_2^*)|\leq 2\varepsilon \Rightarrow$

f auf $\overline{M}$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow |f|$ auf M beschränkt

#Andere (eigene) Formulierung:

#Bew: Sei $M \neq \overline{M} = M \cup M'$

Sei $z_0 \in M' \setminus M$. Nach Vor. gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$



(unabhängig von z), $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon\ \ \forall\ z_1,z_2 \in M,\ |z_1-z_2|<\delta \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0: |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon,\ \forall\ z_1,z_2 \in M \cap \mathring{U}_{\delta/3}(z_0) \underset{S4.2.3\ 2.)}{\Rightarrow}$

$\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) =: f(z_0)\ \ \forall\ z_0 \in M' \setminus M$.

Sei $z_1^*, z_2^* \in M' \setminus M$ mit $|z_1^*-z_2^*|<\delta/3 \Rightarrow$

Zu $z_1^*\ \exists\ z_1 \in M \cap \mathring{U}_{\delta/3}(z_1^*)$: $|f(z_1)-f(z_1^*)|<\varepsilon/2,\ f(z_1^*)=\lim\limits_{z \to z_1^*} f(z),\ \forall\ z \in M$

$z_2^*\ \exists\ z_2 \in M \cap \mathring{U}_{\delta/3}(z_2^*)$: $|f(z_2)-f(z_2^*)|<\varepsilon/2,\ f(z_2^*)=\lim\limits_{z \to z_2^*} f(z),\ \forall\ z \in M$

$|z_1-z_2| \le \underbrace{|z_1 - z_1^*|}_{<\delta/3} + \underbrace{|z_1^* - z_2^*|}_{<\delta/3} + \underbrace{|z_2^* - z_2|}_{<\delta/3} < 3\delta/3=\delta \underset{Vor,\ D4.4.5\ |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon}{\Rightarrow}$

$|f(z_1^*)-f(z_2^*) \le \underbrace{|f(z_1^*) - f(z_1)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f(z_1) - f(z_2)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f(z_2) - f(z_2^*)|}_{<\varepsilon/2} < 2\varepsilon \Rightarrow |f(z_1^*)-f(z_2^*) \le 2\varepsilon$

$\Rightarrow$f auf $\overline{M}$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ |f| auf M beschränkt

Sei $z_1^* \in M' \setminus M$ mit $|z_1^*-z_2^*|<\delta/3,\ z_2^*=z_2 \in M \Rightarrow$

Zu $z_1^*\ \exists\ z_1 \in M \cap \mathring{U}_{\delta/3}(z_1^*)$: $|f(z_1)-f(z_1^*)|<\varepsilon/2,\ f(z_1^*)=\lim\limits_{z \to z_1^*} f(z),\ \forall\ z \in M$

$|f(z_2)-f(z_2^*)|=|f(z_2)-f(z_2)|=0\ f(z_2^*)=f(z_2) \lim\limits_{z \to z_2^*=z_2} f(z),\ \forall\ z \in M$

$|z_1-z_2| \le \underbrace{|z_1 - z_1^*|}_{<\delta/3} + \underbrace{|z_1^* - z_2|}_{<\delta/3} + \underbrace{|z_2^* - z_2|}_{=0} < 2\delta/3=\delta' \underset{Vor,\ D4.4.5\ |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon}{\Rightarrow}$

#$|f(z_1^*)-f(z_2^*) \le \underbrace{|f(z_1^*) - f(z_1)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|f(z_1) - f(z_2)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f(z_2) - f(z_2^*)|}_{=0} < \frac{3\varepsilon}{2}=\varepsilon' \Rightarrow |f(z_1^*)-f(z_2^*) \le \varepsilon'$

$\Rightarrow$ f auf $\overline{M}$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ |f| auf M beschränkt

Andere Formulierung (nur für $\mathbb{R}$)

Vor: Intervall I, $f: I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf M.

Aussage: Falls I beschränkt ist, ist auch f(I) beschränkt

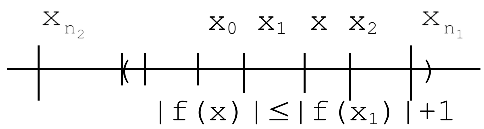
Bew:???? Nicht verstanden

Zu $\varepsilon=1\ \exists\ \delta>0$: $|f(x)-f(x')|<1\ \forall\ x,x' \in I$ mit $|x-x'|<\delta$.

Wähle $x_0 \in I$, definiere dann $x_n := x_0+\delta_n$, $n \in \mathbb{Z}$

$\exists$ min $n_1 \in \mathbb{N}$, $x_{n_1} \notin I$,

$\exists$ max $n_2 \in \mathbb{N}$ $x_{n_2} \notin I$. Dann gilt:



$|f(x)| \le \max|f(x_\nu)|+1\ \ \forall\ x \in I\ \ (n_2+1 \le \nu \le n_1-1)$

S4.4.12(2567)

$f:I\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf I $\underset{!}{\Rightarrow}$ f stetig auf I

*//**D4.4.5** (2562)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf M:$\Leftrightarrow$ //
//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ //
Bew:Aus D4.4.5 glm Stetigkeit (x'... ε... δ)

Bem:(.)Stetigkeit $\underset{\text{nicht}}{\Rightarrow}$ gleichmäßige Stetigkeit
(f(x)=1/x auf (0,1), δ_ε hängt von x_0 ab)
(..)Falls I kompakt und stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.7}$ f(I) kompakt, also beschränkt

A4.4.15 Zeige:Eine auf einem beschränkten Intervall gleichmäßig stetige Funktion ist dort beschränkt.

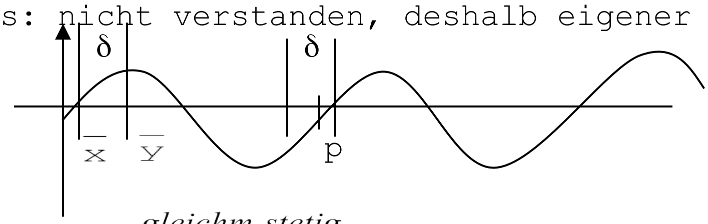
A4.4.16 Zeige:Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist auf $\mathbb{R}_+$ nicht gleichmäßig stetig.
Tip: nicht beschränkt

A4.4.17

Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt:
$\exists\ p>0: f(x+p)=f(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Man nennt dann f auch periodisch mit Periodenlänge p.
Zeige, dass die Funktion f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

*//**S4.4.9**(2565)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt (2560), $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.//
//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//

Lös: nicht verstanden, deshalb eigener Versuch Seite 2569



$[0,p]\ \underbrace{gleichm.stetig}_{S4.4.9}\ \forall\ |x-y|<\delta\ldots$

$[0,2p]\ \underbrace{gleichm.stetig}_{S4.4.9}$

Bew:Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R}.\ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(.) $f(x+p)=f(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall\ k\in\mathbb{Z},\ f(x+kp)=f(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$

(..) f auf $\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f auf $[0,2p]$ stetig $\underset{S4.4.9}{\Rightarrow}$
f auf $[0,2p]$ gleichmäßig stetig.
$\forall\ \varepsilon_1>0\ \exists\ \delta_1>0:\ \forall\ x_1,x_2\in[0,2p]:|x_1-x_2|<\delta_1 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_1$

(...) $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \exists\ k\in\mathbb{Z},\ r\in[0,p):x=kp+r$
Falls $x=k_xp+r_x,\ y=k_yp+r_y$ und $|x-y|<p \Rightarrow |k_x-k_y|\le 1$, da
Für $k=\min\{k_x,k_y\}$: $x-kp\in[0,2p]$ und $y-kp\in[0,2p]$

Sei: neues $\varepsilon>0$ beliebig. Setze $\varepsilon_1=\varepsilon$ und bestimme δ_1.

Setze $\delta=\min\{\delta_1,p\}$, dann $\forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R},\ |x_1-x_2|<\delta,\ k=\min\{k_{x_1},k_{x_2}\}\underset{(...)}{\Rightarrow}$

$x_1-k_p\in[0,2p],\ x_2-k_p\in[0,2p]$ und $|(x_1-kp)-(x_2-kp)|=|x_1-x_2|<\delta\ \underset{(..)}{\Rightarrow}$

$||f(x_1-kp)-f(x_2-kp)|<\varepsilon\ \underset{(.)}{\Rightarrow}\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Eigener Lösungsversuch

//**S1.5.15**(759)

//1.) $\forall\ a\in\mathbf{R}\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in\mathbf{Z}$ mit

// $[a]\le a<[a]+1,\ [a]:=\max\{n\in\mathbf{Z}\,|\,n\le a\}$

//**S1.5.16**(761) **(**Division mit Rest)

// $\forall\ p\in\mathbf{Z}$ und $n\in\mathbf{N}\ \exists$ eindeutig bestimmte Zahlen $q\in\mathbf{Z}$ und

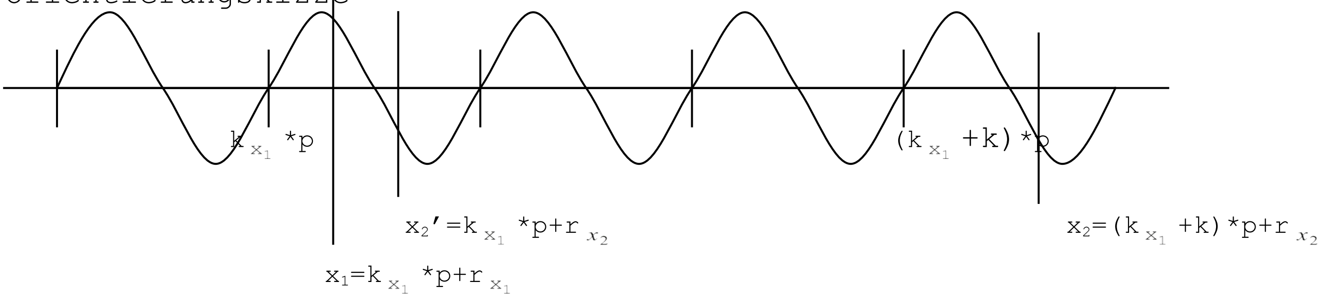
// $r\in\{0,\dots,n-1\}$ mit $p=nq+r$

*//**S4.4.8**(2565)Gleichmäßige Stetigkeit//*

//Vor:Sei $M\subset\mathbf{R}$ oder $M\subset\mathbf{C}$ und M kompakt, $f:M\to\mathbf{C}$ stetig auf M.//

//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//

Orientierungskizze



Bew: $\bullet$ S1.5.16: $\forall\ [\delta]\in\mathbf{Z}$ und $p\in\mathbf{N}\ \exists$ eindeutig bestimmte Zahlen $k\in\mathbf{Z}$ und $t\in\{0,\dots,p-1\}$ mit $[\delta]=pk+t$

$\bullet\bullet$ S1.5.15 $\Rightarrow\ \forall\ \delta>0,\ \delta\in\mathbf{R},\ \exists\ [\delta]\in\mathbf{Z}:\ [\delta]\le\delta<[\delta]+1,\ [\delta]:=\max\{n\in\mathbf{Z}\,|\,n\le\delta\}\ \Rightarrow$ $\exists\ s\in[0,1),\ s>0,\ \delta=[\delta]+s$

$\bullet\bullet\bullet$ $(\bullet\ \&\ \bullet\bullet)\Rightarrow\ \forall\ \delta\in\mathbf{R}\ \exists\ k\in\mathbf{Z},\ p\in\mathbf{N},\ r\in[0,p):\ \delta=[\delta]+s=kp+t+s=kp+r$

Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R},|x_1-x_2|<\delta:\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(.) $f(x+p)=f(x)\ \ \forall\ x\in\mathbf{R}\ \Rightarrow\ \forall\ k\in\mathbf{Z},\ f(x+kp)=f(x)\ \ \forall\ x\in\mathbf{R}$

(..) f auf $\mathbf{R}$ stetig $\Rightarrow$ f auf $[kp,(k+1)p]$ stetig $\underset{S4.4.8}{\Rightarrow}$

f auf $[kp,(k+1)p]$ gleichmäßig stetig.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta'>0:\ \forall\ x_1,x_2'\in[kp,(k+1)p]:$

$|x_2'-x_1|<\delta':\ |f(x_2')-f(x_1)|<\varepsilon$

$\bullet\bullet\bullet$: Sei $x_1,x_2\in\mathbf{R},\ x_1=k_{x_1}p+r_{x_1}\in[k_{x_1}*p,\ (k_{x_1}+1)*p]$,

$x_2=(k_{x_1}+k)p+r_{x_2},[(k_{x_1}+k)*p,\ (k_{x_1}+k+1)*p]$,

$x_2'=k_{x_1}p+r_{x_2}\in[k_{x_1}*p,\ (k_{x_1}+1)*p]$

$\underset{(.)}{\Rightarrow}\ f(k_{x_1}p+r_{x_2})=f(x_2')=f(k_{x_1}+k)p+r_{x_2})=f(x_2)\ \Rightarrow$

$\delta=|x_2-x_1|=|(k_{x_1}+k)p+r_{x_2}-k_{x_1}p-r_{x_1}|=|kp+(r_{x_2}-r_{x_1})|=|kp+r|\in\mathbf{R}$

$\delta'=|x_2'-x_1|=|k_{x_1}p+r_{x_2}-k_{x_1}p-r_{x_1}|=|r_{x_2}-r_{x_1}|,r=(r_{x_2}-r_{x_1})\in[0,p)$

$\Rightarrow\ |x_2-x_1|<\delta\ \Leftrightarrow\ |x_2'-x_1|<\delta'$

$\underset{(..)}{\Rightarrow}\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta'>0\ \forall\ x_1,x_2'\in\mathbf{R},|x_2'-x_1|<\delta':\ |f(x_2')-f(x_1)|=|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon\ \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R},|x_2-x_1|<\delta:\ |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$

A4.4.18 Geg sei eine stetige Funktion $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$).
Zeige, dass genau dann eine stetige Fortsetzung $F:[a,b]\to \mathbb{R}$ von f existiert, wenn f gleichmäßig stetig ist.

\# $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow$
\# $F:[a,b]\to \mathbb{R}$ stetig mit $F|_{(a,b)}=f$

//**S4.4.8**(2565) Gleichmäßige Stetigkeit von f
//Vor: Sei $M\subset\mathbb{K}$ & M kompakt(d.h. abgeschl& beschränkt)
// $f:M\to\mathbb{K}$ stetig auf M.
//Aussage: f ist gleichmäßig stetig auf M.
//**S4.4.10**(2568) Ist $f:I\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf I,so ist f stetig auf I
//***S4.2.2***(2304)*Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbb{R}$//*
// *Bem:3.)* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$
// $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ mit $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \forall x_1,x_2\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. //

Lös: $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.10}$ $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ stetig

„$\Rightarrow$" $F:[a,b]\to \mathbb{R}$ sei stetig mit $F|_{(a,b)}=f$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$ F gleichmäßig stetig
$\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig

„$\Leftarrow$" $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ sei gleichm stetig, d.h.
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, so dass $\forall\ x,y\in(a,b)$ mit $|x-y|<\delta: |f(x)-f(y)|<\varepsilon \Rightarrow$
(*) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\ \forall\ x,y\in(a,a+\delta)$ mit $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.2.2\,Bem\,3.)}$ $\exists\ \alpha=\lim\limits_{x\to a_+}$
f(x)

Genauso zeigt man, dass $\beta=\lim\limits_{x\to b_-} f(x)$ existiert .

Definiere $F:[a,b]\to \mathbb{R}$. $F(x)=\begin{cases}\alpha_+ & x=a\\ f(x) & x\in(a,b)\\ \beta_- & x=b\end{cases}$,

dann ist f stetig $\Rightarrow$ Beh

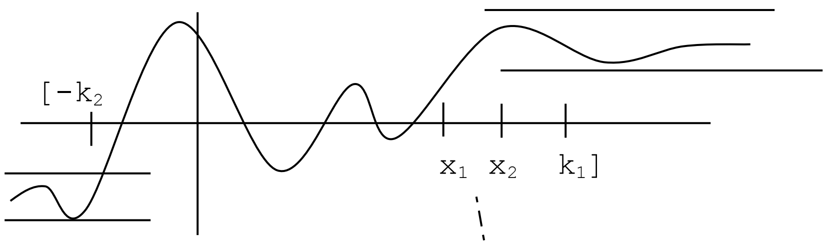
\# (*) $(a,a+\delta)\not\subset(a,b)$? also ist in $(a,a+\delta)$ nicht die gleichmäßige
\# Stetigkeit erklärt?

A4.4.19

a) Zeige: Ist die Funktion f auf $\mathbb{R}$ stetig und existieren die Grenzwerte von f für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$, so ist f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

*//**S4.4.8**(2563)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt, $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.//
//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//
*//**D4.4.5** (2562)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf M:$\Leftrightarrow$ //
//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M$: $|z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

Lös:D4.4.5 (2562) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$: $\forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,



(.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert $\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon_1>0\ \exists\ k_1\in\mathbb{R}_+,\ \forall\ x_1,x_2\geq k_1: |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_1$

(..) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existiert $\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon_2>0\ \exists\ k_2\in\mathbb{R}_+,\ \forall\ x_1,x_2\leq -k_2: |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_2$

(...) f stetig auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f stetig auf $[-k_2,k_1] \underset{S4.4.8}{\Rightarrow}$

f gleichmäßig stetig auf $[-k_2,k_1] \underset{S4.4.8}{\Rightarrow}$

$\forall\ \varepsilon_3>0\ \exists\ \delta_3>0,\ \forall\ x_1,x_2\in[-k_2,k_1], |x_1-x_2|<\delta_3 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_3$.

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Setze $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon/3$, bestimme $k_1,k_2\in\mathbb{R}_+$, $\delta_3>0$, setze $\delta=\min\{\delta_3,k_1,k_2\}$ #>0#. Setze $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ beliebig mit $|x_1-x_2|<\delta$.

- Falls $x_1,x_2\in[-k_2,k_1]$ oder $x_1,x_2\geq k_1$ oder $x_1,x_2\leq -k_2$ folgt aus (.), (..) bzw (...) $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

- - Falls $x_1<k_1$ und $x_2>k_1$:

$$\#|x_1-x_2|=|x_1+k_1-k_1-x_2|\leq\underbrace{|x_1-k_1|}_{>0,da\ x_1<k_1}+\underbrace{|k_1-x_2|}_{>0,da\ x_2<k_1}<\delta \Rightarrow |x_1-k_1|<\delta \wedge |k_1-x_2|<\delta,$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq\underbrace{|f(x_1)-f(k_1)|}_{<\varepsilon_3}+\underbrace{|f(k_1)-f(x_2)|}_{<\varepsilon_1}<\varepsilon_3+\varepsilon_1<\varepsilon$$

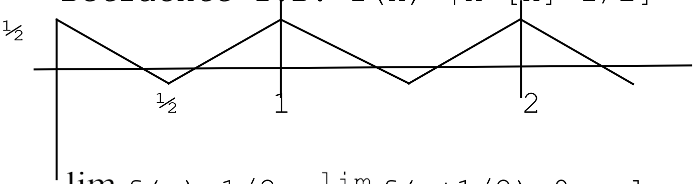
- - - Falls $x_1<-k_2$, $x_2\in[-k_2,k]$ # $x_2>-k_2$ #, analog,

insgesamt gleichmäßig stetig

b) Folgt umgekehrt aus gleichmäßiger Stetigkeit die Existenz der beiden Grenzwerte.
Anleitung: Betrachte z.B. die periodische Funktion.

Lös: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ müssen nicht existieren.

Betrachte z.B. $f(x)=|x-[x]-1/2]$



f auf $\mathbb{R}$ stetig und periodisch, d.h. nach A4.4.17 gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, also für $n\in\mathbb{N}$,

$\lim\limits_{n\to 0} f(n)=1/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1/2)=0$, also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

A4.4.20 Gleichmäßige Stetigkeit auf geg Defbereich?

a) **f=** $\begin{cases} R\to R \\ x\mapsto \sin(x) \end{cases}$

*//**S4.4.8**(2565) Gleichmäßige Stetigkeit von f*
//Vor: Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt, $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.
//Beh: f ist gleichmäßig stetig auf M.

Lös: $\sin(x)$ stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$ $\sin(x)$ glm stetig auf $[0,4\pi]$

$\exists\ \delta_{(\varepsilon)}>0 \underset{x,y\in[0,4\pi]\, und\, |x-y|<\delta}{:} |\sin(x)-\sin(y)|<\varepsilon\ \forall\ x,y$ mit $|x-y|<\delta$

Wahl $k\in\mathbb{Z}$: $(x'=2k\pi+x\ \&\ y'=2k\pi+y)\in[0,4\pi] \underbrace{\Rightarrow}_{\sin\ periodisch}$

$|\sin(x)-\sin(y)|=|\sin(x')-\sin(y')|<\varepsilon \Rightarrow$ sin auf $\mathbb{R}$ glm stetig

b) $g=\begin{cases} (0,1)\to R \\ x\mapsto x^2 \end{cases}$

Lös: $g(x)$ stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$ $g(x)$ glm stetig auf $[0,1]$ $\Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: $\forall\ x,y\in[0,1]$ mit $|x-y|$ gilt stets $|g(x)-g(y)|<\varepsilon \Rightarrow$

$\forall\ x,y\in(0,1)\ \&\ \forall\ \underbrace{\varepsilon>0}_{gleiche\ \delta}\ x,y\in[0,1]$ d.h.

glm Stetigkeit auf $[0,1]$ $\Rightarrow$ glm Stetigkeit auf $(0,1)$

c) $h=\begin{cases} (0,1)\to R \\ x\mapsto \log(x) \end{cases}$

Lös: $h(x)$ nicht definiert auf $[0,1]$....$(0=e^{?})$

Sei $\varepsilon=\log(\frac{3}{2})$ & $\delta>0$ beliebig klein $\underbrace{\Rightarrow}_{x=\frac{3}{2}\delta,\ y=\delta}$ $|x-y|=\frac{1}{2}\delta<\delta$,

$|h(x)-h(y)|=|\log(\frac{3}{2}\delta)-\log(\delta)|=|\log(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\delta})|=|\log(\frac{3}{2})| \underbrace{=}_{\forall\delta\ beliebig\ klein} \log(\frac{3}{2})\geq\varepsilon$

$\Rightarrow h(x)$ nicht glm stetig.

Bem: $h(x)$ glm stetig auf $\underbrace{[a,1]}_{f\ddot{u}r\ 0<a<1}$. Die $[a,1]$ können $(0,1)$ beliebig genau ausfüllen, sie kommen aber nicht an den Randpunkt, da sie immer einen bestimmten echten Mindestabstand zum Nullpunkt aufweisen, während (0,1) keinen Mindestabstand zu Null besitzt, aber 0 trotzdem nicht enthält.

$A \Rightarrow B$ & $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent zu $A \Leftrightarrow B$

//**D4.4.5**(2564) Gleichmäßige Stetigkeit

//Sei $M\subset \mathbb{K}, f:M\to\mathbb{K}$ heißt gleichmäßig stetig auf M:$\Leftrightarrow$

//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

A4.5.21 Geg sei ein Intervall $I\subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$.
Zeige, dass f genau dann gleichmäßig stetig auf I ist, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ in I mit

$$x_n-y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ auch } f(x_n)-f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ gilt.}$$

Lös: (.) $f:I\to\mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig, d.h.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\ \forall\ x,y\in I$ mit $|x-y|<\delta$ gilt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Weiter seien $(x_n),(y_n)$ Folgen in I mit $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$

Z.z.: $f(x_n)-f(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Sei $\varepsilon>0$ baf., $\exists\ n_0(x):\ |x_n-y_n|<\delta(=\delta(\varepsilon))$.

$\forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$ gilt $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_0(\varepsilon)$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$

(..) Nun sei f nicht gleichmäßig stetig, d.h. Negation von D4.4.5

$\exists\ \varepsilon_0>0\ \ \forall\ \delta>0\ \exists\ x,y\in I$ mit $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0$.

Sei ein solches $\varepsilon_0>0$ geg. $\Rightarrow$

$\exists\ x_n,y_n\in I,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-y_n|<1/n$ und $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ aber $f(x_n)-f(y_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ Widerspruch

A4.4.22

a) Es sei $M\subset\mathbb{C}$ und $f:M\to\mathbb{C}$. Zeige:
f gleichmäßig stetig auf M $\Rightarrow$ $|f|$ gleichmäßig stetig auf M

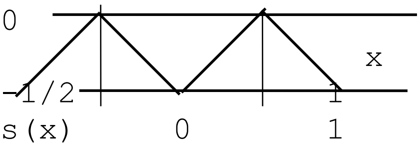
b) Bestimme alle Unstetigkeitsstellen der Funktion

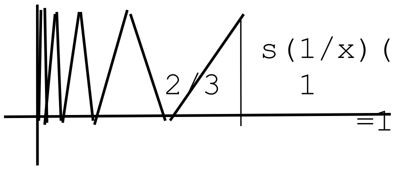
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ f(x)=\begin{cases} i, \text{für } x\in\mathbb{Q} \\ -i, \text{für } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

(Dieses Bsp zeigt, dass die Umkehrung von a) nicht gilt)

A4.4.23 Es sei $s(x):=|x-[x]-1/2|$, $x\in\mathbb{R}$, und $f(x)=\begin{cases} s(1/x) \text{ für } x\in(0,1] \\ 0 \text{ für } x=0 \end{cases}$

a) Untersuche die Funktion $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit





$s(1/x)$ (=0 für $1/x=0,5;\ 1,5;\ 2,5..$

$x=\cancel{2}\quad 2/3;\ 2/5\ldots$

=1/2 für $1/x=\ 1;\ 2;\quad 3\ldots$

$x=\ 1;\ ½;\quad 1/3\ldots$

*//**D4.4.5** (2562)* $M\subset\mathbb{R}$ & $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{C}$ *gleichmäßig stetig auf M:*$\Leftrightarrow$ //

//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

//Bem: $f:M\to\mathbb{C}$ *ist gleichmäßig stetig auf M* $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$//

// *(δ unabhängig von $z\in M$) mit:* $\forall\ z_0\in M,\ \forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$ *gilt*//

// $f(z)\in U_\varepsilon(z_0)$.//

Lös: $\forall\ n\in\mathbb{N}: f(1/n)-f\left(\frac{1}{n+1/2}\right)=s(n)-s(n+1/2)=|n-\underbrace{[n]}_{n}-\frac{1}{2}|-|n+\frac{1}{2}-\underbrace{[n+\frac{1}{2}]}_{n}-\frac{1}{2}|=$

$1/2-0=1/2 \underset{D4.4.5}{\underbrace{\Rightarrow}}$ f nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$, denn sonst würde zu $\varepsilon=1/2$ ein $\delta>0$ existieren mit:

(*) $|f(x)-f(y)|<\varepsilon=1/2\ \ \forall!!!\ x,y\in(0,1]$ mit $|x-y|<\delta$.

Da $1/n-\frac{1}{n+1/2}=1/n-\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} 0 \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbb{N}:\ 1/n_0-\frac{1}{n_0+1/2}<\delta \Rightarrow$

$1/2=f(1/n_0)-f\left(\frac{1}{n_0-1/2}\right)=|f(1/n_0)-f\left(\frac{1}{n_0+1/2}\right)| \underset{*}{\underbrace{<}} \varepsilon=1/2$ Widerspruch!!

\# $\forall\ \delta>0$, (auch beliebig klein) $\exists\ z_1=1/n_0$ und $z_2=\frac{1}{n_0+1/2}$:

\# $|f(z_1)-f(z_2)|=1/2$, also nicht $<1/2 \Rightarrow$

\# $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|=1/2<\varepsilon$

b) Ist f auf (0,1] stetig?

*//**S4.3.2**(2403)Folgenstetigkeit//*
// Genau dann ist $f=D\to K$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge//
// (x_n) in D mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x_0)$ gilt.//
*//**S4.3.3** (2403)Rechenregeln für Stetigkeit//*
//Vor:f,g: $M\to R$ stetig im Punkt $x_0\in M$.//
//Beh:3.)Sind $f:D\to D_1$ stetig in $x_0\in D$ und $g:D_1\to K$ stetig in $f(x_0)\in D_1$, so
// ist die Hintereinanderausführung $g\circ f:D\to K$ stetig in x_0.//
*//**S4.4.3** (2530)Umkehrfunktion//*
//Ist $f:I\to R$ streng monoton und stetig, so besitzt f auf dem Intervall// //$J=f(I)$ eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig ist und im selben// //Sinne wie f streng monoton ist.//
Lös: $s(x):=|x-[x]-1/2|$, ist stetig auf $\mathbb{R}$, wie man z.B. mit dem Folgenkriterium nachprüft.

$$\# \quad \left|\,|x_0-[x_0]-\frac{1}{2}|-|x_n-[x_n]-\frac{1}{2}|\,\right| \le \left|x_0-[x_0]-\frac{1}{2}-x_n+[x_n]+\frac{1}{2}\right| \underset{x_n\to x_0}{=} \left|\underbrace{x_0-x_n}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}+\underbrace{[x_n]-[x_0]}_{\underset{n\to\infty}{=} 0}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|$$

$$\# \quad \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \ \forall\ x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow s(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} s(x_0) \underset{S4.3.2}{\Rightarrow} s(x) \text{ stetig auf } \mathbb{R}$$

$f(x)=x$ stetig auf $\mathbb{R} \underset{S4.4.3}{\Rightarrow}$

$1/x$ ist stetig auf (0,1] (sogar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) $\underset{S4.3.3\ 3.)}{\Rightarrow}$ $f(x)=s(1/x)$ ist stetig auf (0,1]

c) Ist f in $x_0=0$ stetig?
Lös: f ist in $x_0=0$ unstetig, denn sonst wäre f mit b) stetig auf kompakter Menge $[0,1] \underset{S}{\Rightarrow}$ f glm stetig auf [0,1], insbesondere glm stetig auf (0,1] ⇒ Widerspruch zu (a)
Bem: Mit dem Folgenkriterium sieht man, dass $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$ nicht existiert.