S5.1.6 (2750) Differentiationsregeln

//***D4.1.1'***(2002) $M\subset\mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$, $z_0\in\mathbb{C}$, $\delta>0$, $U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<\delta\}$,

// $\overset{o}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$.//

//1.) *$z_0\in M$ heißt innerer Punkt von M:$\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $U_\delta(z_0)\subset M$.*//

// $\overset{o}{M}$ *sei die Menge aller inneren Punkte von M*//

1.) Vor: Seien $f,g:M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0\in\overset{o}{M}$.

Beh: a) $f\pm g$ sind differenzierbar in z_0 und $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$.

Bew aus Def.

b) $\forall$ $\alpha\in\mathbb{C}$ ist αf differenzierbar in z_0 und $(\alpha f)'(z_0)=\alpha f'(z_0)$.

c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel).

Bew: $$\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}=\frac{(f(z)-f(z_0)g(z)-f(z_0)(g(z_0-g(z)}{z-z_0}=$$

$$\underbrace{g(z)}_{\text{diffb stetig}\to g(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\underset{z\to z_0}{\underbrace{\to}}$$

$$g(z_0)f'(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$

//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 //

//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.//

d) Ist $g(z_0)\neq 0$

(und damit $\neq 0$ in $U_\delta(z_0)\subset M$ $\underset{S4.2.3\,2.)}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\exists$ $g(z)\neq 0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$),

g differenzierbar, d.h. nach ***S5.1.2*** stetig, so ist f/g differenzierbar in z_0 und

$$(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}\quad\text{(Quotientenregel)}$$

//***S4.2.3***(2307) *Grenzwertregeln*

//2.) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ *und* $a<\alpha\ (>\alpha$ *bzw* $\neq\alpha)$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ *mit* //

// $f(x)<\alpha\ (>\alpha,\neq\alpha)$ $\forall$ $x\in M\cap\overset{o}{U}_\delta(x_0)$.//

Bew: $g(z_0)\neq 0$ $\underset{S4.2.3\,2.)}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\exists$ $U_\delta(z_0)\subset M$ mit $g(z)\neq 0$ $\forall$ $z\in U_\delta(z_0)$ $\Rightarrow$

$$\frac{\dfrac{1}{g(z)}-\dfrac{1}{g(z_0)}}{z-z_0}=-\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\,\frac{1}{g(z)g(z_0)}\underset{z\to z_0}{\underbrace{\to}}-\frac{g'(z_0)}{(g(z_0))^2}\underset{c)}{\underbrace{\Rightarrow}}$$

$$(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

Andere Formulierung:

$$\frac{\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{z-z_0}=\frac{\frac{f(z)g(z_0)-f(z_0)g(z)}{g(z)g(z_0)}}{z-z_0}=\frac{f(z)g(z_0)-f(z_0)g(z)}{g(z)g(z_0)(z-z_0)}=$$

$$\frac{f(z)g(z_0)-f(z_0)g(z_0)+f(z_0)g(z_0)-f(z_0)g(z)}{g(z)g(z_0)(z-z_0)}=$$

$$\frac{g(z_0)(f(z)-f(z_0))+f(z_0)(g(z_0)-g(z))}{g(z)g(z_0)(z-z_0)}=\frac{g(z_0)(f(z)-f(z_0))-f(z_0)(g(z)-g(z_0))}{\underbrace{g(z)}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} g(z_0)}\;g(z_0)(z-z_0)}\xrightarrow[z\to z_0]{}$$

$$\frac{g(z_0)f'(z)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

2.)Kettenregel

Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in \overset{\circ}{B}$, und sei

$g:B\to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.

Beh: $g\circ f:A\to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

(Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.

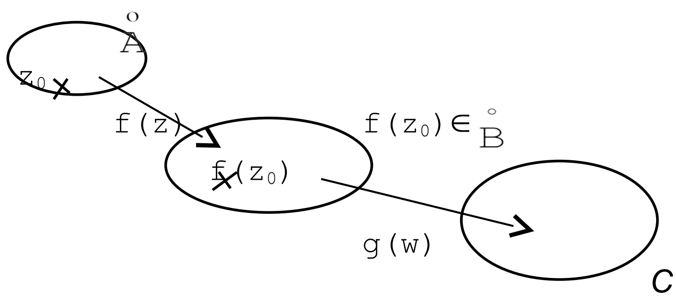
//***S5.1.1***(2703) $f:M\to\mathbb{C}$ ist in $z_0\in \overset{\circ}{M}$ differenzierbar $\Leftrightarrow$ //

// $\exists\ c\in\mathbb{C}$ und $\varepsilon(z):M\to\mathbb{C}$ mit $\varepsilon(z_0):=0$, ε stetig in z_0 und //

// $f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)\ \ \forall\ z\in M$, wobei $c=f'(z_0)$.//

\# $f(z)-f(z_0)=f'(z_0)\ (z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)\ \ \forall\ z\in M$, wobei $c=f'(z_0)$.#

Bew: $f(z)=f(z_0)+\underbrace{f'(z_0)}_{c}(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)$, $\varepsilon(z)\xrightarrow[z\to z_0]{} 0:\varepsilon(z_0)=0$



w:=f(z

$w_0:=f(z_0)$

$g(w)=g(w_0)+g'(w_0)(w-w_0)+\eta(w)(w-w_0)$, $\eta(w)\xrightarrow[w\to w_0]{} 0:=\eta(w_0)\ \Rightarrow$

$g(w)=g(w_0)+g'(w_0)(f(z)-f(z_0))+\eta(w)(f(z)-f(z_0))\ \overset{\Rightarrow}{\underset{S5.1.1}{}}$

$g(f(z))=g(w_0)+g'(w_0)(f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0))$

$\quad+\eta(f(z))(f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0))\ \Rightarrow$

$g(f(z))=g(f(z_0))+g'(f(z_0))f'(z_0)(z-z_0)+$

$\quad[g'(w_0)\underbrace{\varepsilon(z)}_{\to 0}+\underbrace{\eta(f(z))}_{\to 0}f'(z_0)+\underbrace{\varepsilon(z)}_{\to 0}(\underbrace{\eta(f(z))}_{\to 0}](z-z_0)\ \Rightarrow$

$(g\circ f)(z)=(g\circ f)(z_0)+(g'\circ f)(z_0)f'(z_0)(z-z_0)+\omega(z)(z-z_0)$, $\omega(z)\xrightarrow[z\to z_0]{} 0=\omega(z_0)$

$$(g\circ f)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{(g'\circ f)(z_0)f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}=$$

$(g'\circ f)(z_0)f'(z_0)$

Andere Formulierung:
Sind f in x_0 und g in $y_0=f(x_0)$ differenzierbar, so ist $(g\circ f)$ in x_0 differenzierbar und es gilt $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.

//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f:I\to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 //
//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.//

Bew:Aus der Differenzierbarkeit $\underset{S5.1.2}{\Rightarrow}$ Stetigkeit von f folgt, dass $g\circ f$ auf $U_r(x_0)$ definiert ist, für ein genügend kleines r>0. Aus der Differenzierbarkeit folgt
$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)[f'(x_0)+r_f(x)]$, $g(y)=g(y_0)+(y-y_0)[g'(y_0)+r_g(y)]$ mit stetigen Funktionen r_f, r_g, welche gegen 0 gehen für $x\to x_0$ bzw $y\to y_0$.
Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(x_0))+[f(x)-f(x_0)](g'(f(x_0))+r_g(f(x)))\\
&= g(f(x_0))+(x-x_0)(f'(x_0)+r_f(x))(g'(f(x_0))+r_g(f(x)))\\
&= g(f(x_0))+(x-x_0)(g'(f(x_0))f'(x_0)+r_{fg}(x))
\end{aligned}
$$

$r_{fg}(x)=r_f(x)(g'(f(x_0))+r_g(f(x)))+f'(x_0)r_g(f(x))$.

Weil $r_f(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}0$ und $r_g(f(x))\underset{x\to x_0}{\rightarrow}0$, folgt $r_{fg}(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}0$

Daraus folgt die Beh.

Andere Formulierung:
Vor: Gegeben $f:I\to J$ und $g:J\to \mathbb{R}$. f differenzierbar in x_0 und g in $f(x_0)\in J$
Beh: $g\circ f: I\to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt
$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$

*//**D5.1.1**(2700)//*

//1.) Sei $M\subset \mathbb{C}$, $z_0\in \overset{\circ}{M}$ und $f: M\to \mathbb{C}$ gegeben. Die Funktion f heißt//

// differenzierbar in z_0: $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=:f'(z_0)$ //

//S5.1.1(2703) $f:M\to \mathbb{C}$ ist in $z_0\in \overset{\circ}{M}$ differenzierbar $\Leftrightarrow$ //
// $\exists$ $c\in \mathbb{C}$ und $\varepsilon(z):M\to \mathbb{C}$ mit $\varepsilon(z_0):=0$, ε stetig in z_0 und //
// $f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)\ \forall\ z\in M$, wobei $c=f'(z_0)$.//

Bew: $f(x)\underset{S5.1.1}{=}f(x_0)+\underbrace{f(x_0)}_{c}(x-x_0)+\underbrace{\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to x_0]{}0}(x-x_0)$

$g(y)\underset{S5.1.1}{=}g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+\underbrace{\varepsilon(y)}_{\xrightarrow[y\to y_0]{}0}(y-y_0)$ mit $y_0:=f(x_0)\in J$

Mit y=f(x) gilt

$\underbrace{g(f(x))}_{(g\circ f)(x)}\underset{S5.1.1}{=}g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+\tilde{\varepsilon}(f(x))(f(x)-f(x_0))\underset{S5.1.1}{=}$

$\#g(f(x_0))+g'(f(x_0))(f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0))+$

$\#\tilde{\varepsilon}(f(x_0)+(f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0))(f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0))\underset{x\to x}{\rightarrow}$

$\#g(f(x_0))+g'(f(x_0)(f'(x_0)(x-x_0))\ \Rightarrow$

$\#(g(f(x))-(g(f(x_0))=g'(f(x_0)(f'(x_0)(x-x_0))$

$\#(g(f(x_0))'=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g'(f(x_0))f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=$

$\#\lim\limits_{x\to x_0}g'((f(x_0))f'(x_0)=g'((f(x_0))f'(x_0)$

3.) Ableitung der Umkehrfunktion

//**D4.1.1**(2200) Für $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ sei //

// $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \delta$-Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$.//

//Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.//

//1.) $x_0 \in M$ heißt innerer Punkt von $M :\Leftrightarrow \exists\ \delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset M$.//

// $\overset{\circ}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M //

Vor: Sei $A, B \subset \mathbb{C}$ und $f: A \to B$ bijektiv und f differenzierbar in $x_0 \in \overset{o}{A}$, $y_0 := f(x_0) \in \overset{o}{B}$

Beh: f^{-1} ist differenzierbar in $y_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und $f'(x_0) \neq 0$

und dann gilt $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

*//**S5.1.2** (2705) Ist eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 //*

//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.//

*//**S5.1.6**(2750) Differentiationsregeln//*

//2.) Kettenregel//

// Vor: Sei $f: A \to B$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0) \in \overset{\circ}{B}$, und sei $g: B \to \mathbb{C}$ //

// differenzierbar in $f(z_0)$.//

// Beh: $g \circ f: A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und // //$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$ //

// (Kettenregel) $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.//

Bew: $y_0 = f(x_0)$, $\exists\ f'(x_0) \underset{S5.1.2}{\Rightarrow}$ f stetig in x_0.

„$\Rightarrow$" Sei $f^{-1}: f^{-1}(y_0) = x_0$ differenzierbar in y_0.

$x = (f^{-1} \circ f)(x)\ \ \forall\ x \in A \underset{S5.1.6\,2.)}{\Rightarrow} 1 = (f^{-1})'(\underbrace{y_0}_{f(x_0)}) f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) \neq 0$

\# und $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

„$\Leftarrow$" Sei f^{-1} stetig in y_0 und $f'(x_0) \neq 0$, wähle $(y_n) \subset B \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$,

$x_n := f^{-1}(y_n) \underset{n \to \infty}{\rightarrow} \underbrace{x_0}_{= f^{-1}(y_0)}$.

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \underset{n \to \infty}{\rightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'_{y = y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},\quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Andere Formulierung Bew:

//***S5.1.2*** *(2705)Ist eine Funktion* $f:I\to\mathbb{R}$ *in einem Punkt* x_0 *//*
//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.//

//***S4.4.2****(2506) Es sei* $f:I\to\mathbb{R}$ *stetig. Dann ist f genau dann injektiv,//*
// wenn f streng monoton ist.//

#//Andere Formulierung://
#// Vor: $f:I\to\mathbb{R}$ *stetig. Beh: f injektiv ⇔ f streng monoton.//*

//**S4.4.3** (2530)Umkehrfunktion//
//Ist $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig, so besitzt f auf dem Intervall// //J=f(I) eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig ist und im selben// //Sinne wie f streng monoton ist.//

Bew: $y_0=f(x_0)$, $\exists\ f'(x_0) \underbrace{\Rightarrow}_{S5.1.2}$ f stetig in x_0 $\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{Vor:f\ bij\ \Rightarrow\ f injektiv}}_{S4.4.2}$ f streng monoton

$\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.3}$

f^{-1} stetig und im selben Sinne wie f streng monoton.

Sei $f^{-1}:(f^{-1}(y_0)=x_0)$ differenzierbar in y_0.

$x=(f^{-1}\circ f)(x)\ \ \forall\ x\in A \underbrace{\Rightarrow}_{S5.1.6\,2.)} 1=(f^{-1})'(\underbrace{y_0}_{f(x_0)})f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)\neq 0.$

f^{-1} stetig in y_0 (2752) und $f'(x_0)\neq 0$, wähle $(y_n)\subset B\setminus\{y_0\}, y_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} y_0$,

$x_n:=f^{-1}(y_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \underbrace{x_0}_{=f^{-1}(y_0)}$

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0}=\frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)}=\frac{1}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'_{y=y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},\quad (f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

Andere Formulierung (für $\mathbb{R}$):

Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig und streng monoton, und sei $f(I)=J$. Sei x_0 ein innerer Punkt, d.h., kein Randpunkt von I, sei f differenzierbar im Punkt x_0 und sei $f'(x_0)\neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $y_0=f(x_0)\in J$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1}(y_0))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Bew:Es gilt offenbar (mit y=f(x)) $\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$,

und wegen der Stetigkeit der Umkehrfunktion gilt $x\to x_0$ für $y\to y_0$. Daraus folgt die Beh.

Andere Formulierung:

Bew:Sei (y_n) eine beliebige Folge aus $J\setminus\{y_0\}$ mit $y_n\to y_0$. Mit $x_n=f^{-1}(y_n)\in I\setminus\{x_0\}$ (sonst Injektivität verloren) und wegen der Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1} (S4.4.2) gilt $x_n\to x_0$ ($\hat{=}\, f^{-1}(y_n)\to f^{-1}(y_0)$) folgt aus den GW Regeln

$$\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{\underbrace{y_n-y_0}_{\neq 0}}=\frac{x_n-x_0}{\underbrace{f(x_n)-f(x_0)}_{\neq 0}}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\Rightarrow \text{Beh}$$

//Vor:Sei $A,B\subset\mathbb{C}$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in

// $x_0\in \overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in \overset{o}{B}$

// Beh:f^{-1} ist differenzierbar in $y_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und $f'(x_0)\neq 0$

// und dann gilt $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Bsp:● $f(x)=e^x$, $A=\mathbb{R}$, $B(0,\infty)$, $f^{-1}(y)=\log y$ stetig auf $(0,\infty)$ ⇒

$$\frac{d}{dy}\log y=\frac{1}{\frac{d}{dx}e^x}\Big|_{x=\log y}=\frac{1}{e^x}\Big|_{x=\log y}=\frac{1}{e^{\log y}}\Rightarrow (\log y)'=\frac{1}{y}\quad\forall\ y>0$$

$$(f^{-1})'(y)=(\log y)'=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{(e^x)'}\Big|_{x=\log y}=\frac{1}{e^x}\Big|_{x=\log y}=\frac{1}{e^{\log y}}\Rightarrow (\log y)'=\frac{1}{y}\quad\forall\ y>0$$

\# ●● $y=f(x)=\log x$, $A=\mathbb{R}_+$, $B=(0,\infty)$, $f^{-1}(y)=e^y=x$ stetig auf $(0,\infty)$, $y\in B=(0,\infty)$

\# $$(f^{-1})'(y)=(e^y)'=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{(\log x)'}\Big|_{x=e^y}=\frac{1}{1/x}\Big|_{x=e^y}=\frac{1}{1/e^y}=e^y$$

(2755)Folgerungen:

Es gilt, dass nachstehende Funktionen auf dem angegebenen Bereich differenzierbar sind:

1.)Rationale Funktionen sind differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich (DB) (Quotientenregel), insbesondere gilt $(x^{-n})'=-nx^{-n-1}\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

2.)tan und ctan sind differenzierbar auf ihrem DB und es gilt:

//(2755)Folgerungen:

// $(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\quad\forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2\}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$.

// d)Ist $g(z_0)\neq 0$ //

// (und damit $\neq 0$ in $U_\delta(z_0)\subset M \underset{S4.2.32.)}{\Rightarrow} \exists\ g(z)\neq 0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$),//

// g differenzierbar, d.h. nach ***S5.1.2*** stetig, so ist f/g//

// differenzierbar in z_0 und //

// $(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//

$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\quad\forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2\}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$.

$(\text{ctan } x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-1+\text{ctan}^2=\frac{-1}{\cos^2 x}\quad\forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$.

3.)tanh und ctanh sind differenzierbar auf ihrem DB:

//**D3.6.4**(2150) Hyperbolische Funktionen//

// $\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cosh z \neq 0$ (Tangens hyperbolicus)//

// $\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cosh z \neq 0$ (Cotangens hyperbolicus)//

$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$(\mathrm{ctanh}\, x)' = 1 - \mathrm{ctanh}^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.) • $(\log x)' = 1/x$, $x > 0$

//**S4.4.3**(2530) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf I, so besitzt f //auf dem Intervall $J = f(I)$ eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig //ist und im selben Sinne wie f streng monoton ist.//

*//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//*

//3.)Ableitung der Umkehrfunktion//

// Vor:Sei $A, B \subset \mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $f: A \to B$ bijektiv und f differenzierbar in //

// $x_0 \in \overset{o}{A}$, $y_0 := f(x_0) \in \overset{o}{B}$ //

//Beh:f^{-1} ist differenzierbar in $y_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und //

// $f'(x_0) \neq 0$ und dann gilt//

// $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .//

Bew: $e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty) \uparrow$,bijektiv, differenzierbar mit $(e^x)' = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \underset{S4.4.3}{\Rightarrow}$

$\log y : (0, \infty) \uparrow$,bijektiv $\underset{S5.1.6\,3.)}{\Rightarrow}$ $\log y$ differenzierbar.

$(\log y)' = \frac{1}{\underbrace{(e^x)'}_{=e^x}\Big|_{x=\log y}} \#= \frac{1}{e^{\log y}} \#= 1/y \quad \forall y > 0$

•• $(a^x)' = a^x \log a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$

// **S5.1.6** (2750) 2.)Kettenregel//

// Vor:Sei $f: A \to B$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{o}{A}$, $f(z_0) \in \overset{o}{B}$, und sei //

// $g: B \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//

// Beh: $g \circ f: A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und//

// $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$ bzw $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.//

Bew: $(a^x)' = (e^{x \log a})' \underset{S5.1.6\,2.)}{=} e^{x \log a} \log a = a^x \log a$

• • • $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$, $x, a > 0$

// $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ .//

\# $f^{-1}(y) = \log_a y = x$, $f(x) = (a^x) = y$, $(f(x))' = (a^x)' = (a^{\log_a y})$ #

Bew: $(\log_a y)' = \frac{1}{(a^x)'\big|_{x=\log_a y}} = \frac{1}{\log a * a^x\big|_{x=\log_a y}} = \frac{1}{(\log a)y}$

//**D2.3.3**(1454)Für a>0 sei $a^b := e^{b^c \log a}$ $\forall$ $b \in \mathbb{R}$//

// #S2.3.5 ${}^e\log a^b = b * {}^e\log a \Leftrightarrow a^b = e^{c \log a^b} = e^{b^c \log a}$ //

// $\log_a b := \frac{\log b}{\log a}$ $\forall$ $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a \neq 1$ Logarithmus von b zur Basis $a \neq 0$.

Andere Formulierung Bew:

Bew : $\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \overset{?}{\Rightarrow}$ Beh

6.) $(\text{Arcsinh } x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $(\text{Arcosh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$

Bew: # $f^{-1}(x) = \text{Arcsinh } x = y$, $f(y) = \sinh y$, $f(y)' = (\sinh y)'$ #

$(\text{Arcsinh } x)' = \frac{1}{(\sinh y)'}\Big|_{y=\text{Arc}\sinh x} = \frac{1}{(\cosh y)'}\Big|_{y=\text{Arc}\sinh x} =$

$\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}\Big|_{y=\text{Arc}\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, ……analog Arccosh

L5.1.1 (2759)Produktregel für höhere Ableitungen

Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ n mal diffb in x_0 ($n \in \mathbb{N}$), so ist auch $f * g: I \to \mathbb{R}$ n mal diffb in x_0 und es gilt:

$(f*g)^{(n)}(x_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n}{\nu} (f)^{(\nu)}(x_0) * g^{(n-\nu)}(x_0))'$

Bew: Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, n=1, Produktregel, $n \to n+1$ (Binominalformel)

Bem:Ist $f: I \to \mathbb{R}$ n mal diffb in $x_0 \in I$, so gilt $\forall$ $m \in \mathbb{N}_0$

$$(f(x)(x-x_0)^m)^n\Big|_{x=x_0} = \begin{cases} 0, n < m \\ m!\binom{n}{m} f^{(n-m)}, \quad n \geq m \end{cases}$$????????????????

Bez:Wir sagen ein Polynom $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ besitzt eine m fache Nullstelle in $z_0 \in \mathbb{C}$ ($m \in \mathbb{N}$), falls ein Polynom Q existiert $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit:

(.) $P(z) = Q(z)(z-z_0)^m$ (..) $Q(z_0) \neq 0$

Bem: z_0 ist m-fache Nullstelle $\Leftrightarrow$ $P^{(\nu)}(z_0) = \begin{cases} 0, 0 \leq \nu \leq m-1 \\ \neq 0, \nu = m \end{cases}$???????????

//**_D5.1.1_** (2700)//

//(…)f ist n mal stetig diffb auf I (kurz: $f\in C^n(I)$), falls//

// f n mal diffb ist $\forall\ x\in I$ und $f^{(n)}:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I ist.//

//(....)f ist beliebig oft diffb auf I(kurz $f\in C^\infty(I)$), falls //

// $f\in C^n(I)$) $\forall\ n\in\mathbb{N}$.//

Bsp zu C^∞:

(.) $f(x)=e^x$ $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(x)=e^x\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

(..) sin x, cos $x\in C^\infty(\mathbb{R})$, zB $(\sin x)^{(4n+\ell)}=\begin{cases}\sin x, & \ell=0\\ \cos x, & \ell=1\\ -\sin x, & \ell=2\\ -\cos x, & \ell=3\end{cases}$, $n_0\in\mathbb{N}_0$.

(…) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}\in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x)^{(n)}=\begin{cases}0, & x=0\\ P_{3_n}(1/x)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}$

(….) $f(x)=x^m\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^m=n!\binom{m}{n}x^{m-n}$ (=0 für n>m) $\forall\ m,n\in\mathbb{N}_0$.

Bsp (2760):

//**_S5.1.6_** *(2750) 3.)Ableitung der Umkehrfunktion//*

// Vor:Sei $A,B\subset\mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in //

// $x_0\in\overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in\overset{o}{B}$ //

// Beh: f^{-1} ist differenzierbar in y_0 $\Leftrightarrow$ f^{-1} ist stetig in y_0 und $f'(x_0)\neq 0$

// und dann gilt $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$ .//

//**S5.1.5**(2710) $(e^z)'=e^z$//

1.)siehe auch A5.1.6 a)

$f(x)=e^x$, $A=\mathbb{R}$, $B=(0,\infty)$, $f^{-1}(y)=\log y$ stetig auf $(0,\infty)$

$\underset{S5.1.5\,3.)}{\Rightarrow}\ \frac{d}{dy}\log y=\left.\frac{1}{\frac{d}{dx}e^x}\right|_{x=\log y}=\left.\frac{1}{e^x}\right|_{x=\log y}=\frac{1}{e^{\log y}}=\frac{1}{y}\ \Rightarrow$

$(\log y)'=1/y\ \forall\ y>0$.

2.)siehe auch A5.1.6 b)

$\frac{d}{dx}x^\alpha=\frac{d}{dx}e^{\alpha\log x}=e^{\alpha\log x}*\alpha\cdot 1/x=e^{\alpha\log x}\alpha e^{-\log x}=\alpha e^{(\alpha-1)\log x}=$

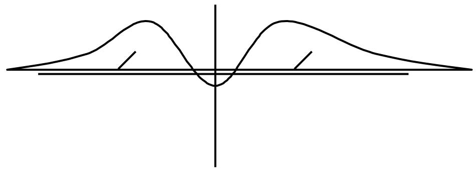
$\alpha(e^{\log x})^{\alpha-1}=\alpha x^{\alpha-1}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

3.) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>-1$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}*1$, $x>-1$ Kettenregel

4.) $f(x)=(1+x^{\beta})^{\alpha}$, $x>0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
$f'(x)=\alpha(1+x^{\beta})^{\alpha-1}\beta x^{\beta-1}$, $x>0$

5.) $f(x)=\begin{cases} 0, x=0 \\ x^{-n}\exp(-1/x^2), x\neq 0, n\in\mathbb{Z}\end{cases}$, stetig auf $\mathbb{R}$,

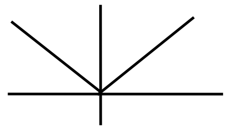


f differenzierbar für $x\neq 0$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{-n-1}\exp(-1/x^2)\ \xrightarrow{x\to 0}\ 0$

$f'(x)=\begin{cases} 0, x=0 \\ \exp(-1/x^2)(2x^{-n-3}-nx^{-n-1}), x\neq 0\end{cases}$

6.) $f(x)=|x|$,



$x>0: |x|=x$, $\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$, $f'(x)=1\ \forall\ x>0$

$x<0: f'(x)=-1\ \forall\ x<0$, $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$

7.) $\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$ Produkt Regel, Induktion nach n

$\frac{d}{dz}z^n=\frac{d}{dz}zz^{n-1}=1*z^{n-1}+z(n-1)z^{n-2}=nz^{n-1}$

8.) $\frac{d}{dz}z^{-n}=\frac{d}{dz}(\frac{1}{z^n})=\frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}}=-nz^{-n-1}$

9.) //**S3.2.8** (1758) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.//

// $\forall\ z\in\mathbb{R}$ gilt weiter $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!=\exp(z)=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.//

$(e^z)' \underset{S3.2.8}{=} (\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n)!}=e^z$.

*//**D3.6.2**(2104)*
//1.) $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ sei //
// $\cos\alpha:=\mathrm{Re}\ e^{i\alpha}=1/2(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})$ und $\sin\alpha:=\mathrm{Im}\ e^{i\alpha}=\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$.//

10.) $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$, $\sin' z=\frac{1}{2i}(ie^{iz}+ie^{-iz})=\cos z$,
analog $\cos' z=-\sin z$

//(2754)**Folgerungen:** *4.) • $(\log x)'=1/x$, $x>0$//*

11.) $\frac{d}{dx}\log|x|=\begin{cases} 1/x, x>0 \\ -\left|\frac{1}{x}\right|, x<0\end{cases}$, $x\in\mathbb{R}, x\neq 0$.

$\frac{d}{dx}\log(-x)=(1/-x)(-1)=1/\underset{<0}{x}$

Zeige: Polynome, rationale Funktionen, die Expotentialfunktion, die trigonometrischen sowie die hyperbolischen Funktionen sind (an allen Stellen ihres natürlichen Definitionsbereichs) beliebig oft differenzierbar.

A5.1.1 Untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechne ggf ihre Ableitungen:

a) $\sin^2 x$ b) $\cos x \sin x$ c) $\frac{1+2x^2}{x-1}$ d) e^{x^2} e) $2\sin(1+x^2)\cos x$

A5.1.2 Zeige: Ist eine Funktion an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ sowohl rechts- als auch linksseitig differenzierbar, so ist sie dort genau dann differenzierbar, wenn die rechts- und die linksseitige Ableitung übereinstimmen.

A5.1.3 Gib ein Beispiel für eine Funktion, welche an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ sowohl rechts- als auch linksseitig differenzierbar ist, ohne dort differenzierbar zu sein.

//**D2.3.3**(1454)Für a>0 sei $a^b := e^{b^c \log a}$ $\forall$ $b \in \mathbb{R}$//

A5.1.4 Zeige mit der Kettenregel und der Definition der allgemeinen Potenzfunktion D2.3.3 , dass $(a^x)' = a^x \log a$ $\forall$ $a>0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

A5.1.5 Man gebe jeweils den maximalen Definitionsbereich (in $\mathbb{R}$) an, auf dem f(x) differenzierbar ist und bestimme die Ableitung von f(x):

a) $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$

*//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//*

//1.)Vor:Seien f,g: $M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in\overset{\circ}{M}$.//

//Beh: d)Ist $g(z_0)\neq 0$ (und damit $\neq 0$ in $U_\delta(z_0)\subset M$... $\Rightarrow$ //

// $\exists$ $g(z)\neq 0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$), g differenzierbar, d.h. stetig, so ist f/g

// differenzierbar in z_0 und //

// $(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//

Lös: S5.1.6: $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$ ist differenzierbar auf $M=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

(Dieses M ist maximal in $\mathbb{R}$) denn in $x_0=-2$ ist f nicht stetig (fortsetzbar) $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ $\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{(x+2)1-(x-2)1}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$ oder $f(x)=1-\frac{4}{x+2}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}$

*//**S5.1.4**(2706)Vor:PR $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $z,z_0\in\mathbb{C}$ und KR R>0.//*

//Beh:$f(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ dort differenzierbar mit Ableitung //

// $f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$.//

b) $f(x)=\frac{\log(1+x)}{x}$

*//**S5.1.4**(2706)Vor:PR $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $z,z_0\in\mathbb{C}$ und KR R>0.//*

//Beh:$f(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ dort differenzierbar mit Ableitung //

// $f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$.//

es gilt,....siehe später…log Reihe...Berechnung f'(0)

$f(x)=\log(1+x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu+1}x^{\nu+1}$ für $|x|\leq 1$ ist differenzierbar und

$f'(x)\underset{S5.1.4}{=}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu(-1)^\nu}{\nu+1}x^{\nu-1}$, insbesondere $f'(0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu(-1)^\nu}{\nu+1}x^{\nu-1}=\frac{1(-1)^1}{1+1}0^{1-1}=-1/2$

Lös:# (2754)Folgerungen: 4.) • $(\log x)'=1/x$, $x>0$ und $f'(0)=-1/2$ $\Rightarrow$

f(x) ist differenzierbar auf $M=(-1,\infty)\backslash\{0\}$ und $D=\{-1,\infty\}\backslash\{0\}$ $\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{x\frac{1}{1+x}-[\log(1+x)]1}{x^2}=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}=1/x\left(\frac{1}{1+x}-f(x)\right)$

Bem:Setzt man noch f(0)=1 (stetige Fortsetzung), so gilt: f ist differenzierbar in 0 und f'(0)=-1/2 (Bew. siehe später ...Logarithmusreihe)

c) $f(x)=(x^x)^x$

Lös: $f(x)=(x^x)^x=[\exp(x*\log x)]^x=\exp(x*\log[\exp(x*\log x)])=\exp[(x^2)\log(x)]$,

$D=(0,\infty)$ ist differenzierbar auf $M=(0,\infty)$ $\Rightarrow$

$$f'(x)=\exp(x^2\log x)(x^2\log x)'=f(x)(2x*\log x+x^2\tfrac{1}{x})=f(x)x(1+2\log x)$$

d) $f(x)=x^{(x^x)}$

Lös: Bem: $(x^x)^x=x^{(x^x)} \Leftrightarrow x=1$ oder $x=2$ (oder $x=0$), denn für $x>0$ gilt

$$(x^x)^x=x^{(x^x)} \Leftrightarrow \exp[x^2\log x]=\exp[\exp(x*\log x)\log x] \Leftrightarrow$$

$$x^2\log x=\exp(x*\log x)\log x \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\#\log x=0}=1 \text{ oder } x^2=\exp(x*\log x) \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ oder } 2*\log x=x*\log x \Leftrightarrow x=1 \text{ oder } x=2$$

$$f(x)=x^{\exp(x\log x)}=\exp(\underbrace{\exp(x\log x}_{x^x})\log x)=\exp(x^x\log x)=$$

$$\underbrace{\exp\left(\overbrace{\exp(x\log x)\log x}^{f}\right)}_{g}, \text{ differenzierbar auf } D=(0,\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\overbrace{\underbrace{\exp}_{g'}(\underbrace{\exp(x\log x)\log x}_{f}}^{f(x)}\,[\underbrace{\overbrace{\exp(x\log x)}^{u}\overbrace{\log x}^{v}}_{f'}]'=$$

$$\exp(x\log x)\frac{1}{x}+\underbrace{\exp(x\log x)'}_{\exp(x\log x)\underbrace{(x\log x)'}_{1\log x+x\frac{1}{x}}}\log x$$

//**S5.1.6** (2750)//

// Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{o}{A}$, $f(z_0)\in\overset{o}{B}$, und sei //

// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//

// 2.) Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ //

// 1.)c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$//

$$f(x)\underset{S5.1.6\,2.),1.)c)}{=}\underbrace{\exp\left(\overbrace{\exp(x\log x)\log x}^{g}\right)}_{f}, \text{ differenzierbar auf } D=(0,\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\overbrace{\underbrace{\exp}_{f'}(\underbrace{\exp(x\log x)\log x}_{g}}^{f(x)}\,[\underbrace{\overbrace{\exp(x\log x)}^{u}\overbrace{\log x}^{v}}_{g'=}]'=$$

$$\underbrace{\exp(x\log x)}_{u}\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}+\overbrace{\underbrace{\exp(x\log x)'}_{\exp(x\log x)\underbrace{(x\log x)'}_{1*\log x+x\frac{1}{x}}}}^{u'}\underbrace{\log x}_{v}$$

$$f(x)[\exp(x\log x)(x\tfrac{1}{x}+1\cdot\log x)\log x+\exp(x)\log x*\tfrac{1}{x}]=$$

$$f(x)\underbrace{\exp(x\log x)}_{x^x}[(\log x)^2+\log x+1/x],\ x>0$$

e) $f(x)=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$

Lös: $f(x)=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)=1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$,
ist differenzierbar auf $D=(0,\infty)$

$\Rightarrow f'(x)=(-1/2)\, x^{-\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1}=$

$-1/2(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}})=-\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$

//**S5.1.6** (2750)//
// Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in \overset{\circ}{B}$, und sei //
// $g:B\to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//
// 2.) Beh: $g\circ f:A\to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ //
// 1.) c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ //
f) $f(x)=2x^2e^{ax}\sin(bx)$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ fest

Lös: $2\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\overbrace{e^{ax}}^{s}\overbrace{\sin(bx)}^{t}}_{v}$, f diffb auf $D=\mathbb{R}\Rightarrow$

$f'(x) \underset{S5.1.6\,1.)c)}{=} 2[\underbrace{2x}_{u'} * \underbrace{e^{ax}\sin(bx)}_{v}+\underbrace{x^2}_{u}\{\underbrace{(e^{ax})'}_{s'}\underbrace{\sin(bx)}_{t}+\underbrace{e^{ax}}_{s}\underbrace{(\sin(bx))'}_{t'}\}] \underset{S5.1.6\,2.)}{=}$
$2[2xe^{ax}\sin(bx)+x^2ae^{ax}\sin(bx)+x^2e^{ax}b\cos(bx))]=$
$2e^{ax}[(2x+ax^2)\sin(bx)+bx^2\cos(bx)]=$
$2e^{ax}x[(2+ax)\sin(bx)+b\cos(bx)]$

g) $f(x)=\text{Arsinh } x$ (Arsinh ist die Umkehrfunktion von sinh)#$y=f(x)=\text{Arsinh } x$

Lös: $g(x)=\overbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}^{\sinh x}\Rightarrow g'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, insbesondere

$g\uparrow$, also existiert $g^{-1}=f \wedge g'(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

f differnzierbar auf $\mathbb{R}$ und $f'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\frac{1}{\cosh(\text{Ar}\sinh x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\cosh^2y-\sinh^2y=(\frac{e^y+e^{-y}}{2})^2-(\frac{e^y-e^{-y}}{2})^2=e^ye^{-y}=1$

$\cosh^2y=1+\sinh^2y\Rightarrow|\cosh y|=\sqrt{1+\sinh^2y}$
$=\sqrt{1+(\sinh y)^2}=\sqrt{1+(\sinh(\text{Arsinh } x))^2}=\sqrt{1+x^2}$

f(x) ist differenzierbar auf $M=\mathbb{R}$ und $f'(x)=\frac{1}{\cosh(\text{Ar}\sinh x)}=$

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, *da $\cosh^2x-\sinh^2x=1$ und $\cosh x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$*

h) Zeige: $(\tan x)'=1/\cos^2x$ für $(k-1/2)\pi/2<x<(k+1/2)\pi/2$, mit $k\in\mathbb{Z}$ und
die Tangensfunktion nimmt auf jedem der obigen Intervalle jede
reelle Zahl als Wert an.

A5.1.6

a) Zeige unter Verwendung der Ableitung der Umkehrfunktion, $\forall\ x>0$ gilt $(\log x)'=1/x$

Lös: $I=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\exp(x)$. f auf I stetig und ↑ .

Es ist $f(I)=f(\mathbb{R})=\exp(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+$

$\forall\ x_0\in\mathbb{R}$ ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0)=e^{x_0}\neq 0 \Rightarrow$ Umkehrfunktion f^{-1} (wo $f^{-1}(y)=\log y$) in jedem Punkt $y_0=f(x_0)\in\mathbb{R}_+$ (f surjektiv, also für jedes $y\in\mathbb{R}_+\ \exists\ x\in\mathbb{R}: f(x)=y$) differenzierbar und

$(\log(y_0))'=1/\exp(\log(y_0))=1/y_0\ \forall\ y_0\in\mathbb{R}_+, (\log x)'=1/x\ \forall\ x>0$

b) Zeige für $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, bzw für $a>0$, $x\in\mathbb{R}$ $(a^x)'=a^x\log a$

//**S5.1.6** (2750)//

// Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei //

// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//

// 2.) Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ (Kettenregel)//

// 1.) c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel)//

Lös: $(x^\alpha)=[\exp(\alpha\log x)]' \underset{S5.1.6\,2.)}{\overset{*}{=}} \exp(\alpha\log x)(\alpha\log x)'=x^\alpha\alpha\dfrac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)'=[\underbrace{\exp}_{\text{diffb auf R}}(\underbrace{x\log a}_{\text{diffb auf }R_+,\text{ Werte in R}})]' \underset{S5.1.6\,2.)}{\overset{*}{=}} \exp(x\log a)\log a=a^x(\log a)$.

*Kettenregel, da Verknüpfung von exp und log, beide differenzierbar auf $\mathbb{R}_+$, Werte in $\mathbb{R}_+$, exp auf $\mathbb{R}$.

A5.1.7 Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=x^2e^x$.

Lös: 2 diffb Funktionen auf $\mathbb{R}$, Produktr.. $(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$.

b) $f(x)=\log(\log(x)$, $x>1$

Lös: log differenzerbar auf $\mathbb{R}_+$, Werte in $\mathbb{R}_+$ für $x>1$

$(\log(\log(x))' \underset{S5.1.6\,2.)}{\overset{*}{=}} \dfrac{1}{\log x}(\log x)'=\dfrac{1}{x\log x}$

c) $f(x)=(1+x^2)^{\sin x}$

Lös: $(1+x^2)^{\sin x})'=(\exp(\sin x(\log(1+x^2))'$.

exp differenzierbar in $\mathbb{R}$, Werte in $\mathbb{R}$, sin, log differenzierbar auf $\mathbb{R}$, Werte auf $\mathbb{R}$...

$f(x)'=(\exp(\sin x(\log(1+x^2))' \underset{S5.1.6\,2.),1.)c)}{\overset{*}{=}}$

$\exp(\sin x\log(1+x^2))(\cos x\log(1+x^2)+\sin x\dfrac{1}{1+x^2}2x)=$

$(1+x^2)^{\sin x}[\dfrac{2x\sin x}{1+x^2}+\cos x\log(1+x^2))$

d) $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}$, $|x|<1$

*//**S5.1.6** (2750)//*

// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in \overset{\circ}{B}$, und sei //

// $g:B\to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//

// 2.)Beh: $g\circ f:A\to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ (Kettenregel)//

// 1.)c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel)//

// d)Ist $g(z_0)\neq 0$, g differenzierbar, so ist f/g differenzierbar in z_0

// und $(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//

Lös: $f'(x)=(\underbrace{\exp}_{\text{diffb auf R}}(\underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{diffb}}\underbrace{\underbrace{\log}_{\text{diffb für }|x|<1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}_{\text{auch diffb für }|x|<1}}_{\text{Werte in R}}))' \underbrace{=}_{S5.1.6\,2.),d),c)}$

$\exp(x^2\log(\left(\frac{1+x}{1-x}\right))(2x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right))=$

$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}2x(\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{x}{1-x^2}$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{x}\sin x}{\log x}$, $x>1$

Lös: $f'(x)\underbrace{=}_{Qr}\frac{(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sin x+\sqrt{x}\cos x)\log x-\frac{1}{x}\sqrt{x}\sin x}{(\log x)^2}=$

$\frac{\sin x+2x\cos x\log x-2\sin x}{2\sqrt{x}(\log x)^2}$

f) $f(x)=\sqrt{e^{\sin\sqrt{x}}}$, $x>0$

Lös: f für $x>0$ diffb Funktion. $f'(x)\underbrace{=}_{KR}\frac{1}{2\sqrt{e^{\sin\sqrt{x}}}}e^{\sin\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=$???

A5.1.8 Es seien $n\in N_0$, $M\subset R$ und $x_0\in \overset{\circ}{M}$. Weiter seien die Funktionen $f,g: M\to R$ n-mal differenzierbar in x_0.

- Zeige: $h=f*g$ ist n-mal differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(f*g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0).$$

- • Bestimme hiermit $(h)^{(10)}(0)$ von $h(x)=x\sin x$.

*//**S5.1.6** (2750) Differentiationsregeln//*

//1.) Vor: Seien $f,g: M\to C$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{M}$.//

// c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel).//

*//**S1.7.4** (906) Für $\alpha\in C$ und $n,m,k\in N_0$ $j\in N$ gilt*

//5.) $\binom{\alpha}{j}+\binom{\alpha}{j-1}=\binom{\alpha+1}{j}$

Bew: • Durch Induktion nach n

n=0: $f*g:M\to R$ 0 mal differenzierbar (keine klare Aussagen) und

$$(f*g)^0=(f*g)(x_0)=f(x_0)g(x_0)\underset{\binom{0}{0}=1}{=}\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(0-k)}(x_0)=f(x_0)g(x_0)$$

IH n: $h=f*g$ ist n-mal differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(f*g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0).$$

$n\underset{n\geq 0}{\to}n+1$: Zu zeigen $f*g: M\to R$ (n+1) mal differenzierbar in $x_0\in\overset{\circ}{M}$

und $(f*g)^{(n+1)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0)$.

$\exists$ $f^{(k)}g^{(k)}$ in $U_\delta(x_0)$ für $0\leq k\leq n$ und $f^{(n)}g^{(n)}$ sind differenzierbar in x_0

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)$ ist differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$

$$(f*g)^{(n+1)}(x_0)=((f*g)^{(n)})'(x_0)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)\Big|_{x=x_0}\underset{S5.1.6}{=}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[f^{(k+1)}(x_0)g^{(n-k)}(x_0)+f^{(k)}(x_0)g^{(n-k+1)}(x_0)]\underset{\text{Indexversch}}{=}$$

$$[\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0)]+[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0)]\underset{S1.7.4\,5.)}{=}$$

$$\underbrace{\binom{n}{n}}_{=1=\binom{n+1}{n+1}}f^{(n+1)}(x_0)g(x_0)+[\sum_{k=1}^{n}(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{=\binom{n+1}{k}})f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0)]+\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}}f(x_0)g^{(n+1)}(x_0)=$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x_0)g^{(n+1-k)}(x_0).$$

● ● $h(x)=x \sin x$ $x\in\mathbb{R}$. Sei $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

*//**S5.1.5**(2710) Die Expotentialfunktion, die trigonometrischen und die//*
// hyperbolischen Funktionen sind auf $\mathbb{C}$ differenzierbar und es //
// gilt $(e^z)'=e^z$, $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$, //
// $(\sinh z)'=\cosh z$, $(\cosh z)'=\sinh z$ jeweils $\forall\, z\in\mathbb{C}$.//

$f'(x)=1$, $f^{(n)}(x)=0$, $n\geq 2$,

$g^{(n)}(0)=\begin{cases} 1 & \text{für } n=4k+1 \\ -1 & \text{für } n=4k-1 \end{cases}$, sonst 0 $\underbrace{\Rightarrow}_{10\neq 4k\pm 1}$

$$(h)^{(10)}(0)=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} f^{(k)}(x_0)\,g^{(10-k)}(x_0)=\sum_{k=0}^{1}\binom{10}{k} f^{(k)}(x_0)\,g^{(10-k)}(x_0)=$$

$$\binom{10}{0} f^{(0)}(x_0)\,g^{(10)}(x_0)+\binom{10}{1} f^{(1)}(x_0)\,g^{(9)}(x_0)=$$

$$\binom{10}{0} \underbrace{f(0)}_{=0} f(0)\,g^{(10)}(0)+\binom{10}{1} f^{(1)}(0)\,g^{(10-1)}(0)=10*1*1=10$$

A5.1.9 Zeige die Bernoullische Ungleichung für den allgemeinen Fall: $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$ für $\alpha>1$ und $x>-1$, $x\neq 0$.

*//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//*
//Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar $\forall\, x\in(a,b)$.//
//Beh 3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bew: Betrachte die Fkt (bei $\alpha\in(1,\infty)$ fest), $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x):=(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha x)$ $\Rightarrow$ f beliebig oft differenzierbar und

$f'(x)=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$, $f'(0)=0$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha>1}$

$f''(x)>0\ \forall\, x>-1 \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.4\ 3.)} f'\uparrow$ auf $(-1,\infty)$ $\Rightarrow$

$$\forall\, x\in(-1,0):\ f'(x)=\alpha[\underbrace{\underbrace{(1+\overbrace{x}^{\in(-1,0)})}_{0<1+x<1}{}^{\overbrace{\alpha-1}^{>0}}}_{<1}-1]<\alpha[(1+0)^{\alpha-1}-1]=f'(0)=0,$$

$f'(x)<f'(0)=0\ \ \forall\, x\in(-1,0)$

$$\forall\, x\in(0,\infty):\ f'(x)=\alpha[\underbrace{\underbrace{(1+\overbrace{x}^{\in(0,\infty)})}_{1\leq 1+x}{}^{\overbrace{\alpha-1}^{>0}}}_{>1}-1]>\alpha[(1+0)^{\alpha-1}-1]=f'(0)=0,$$

$f'(x)>f'(0)=0\ \ \forall\, x\in(0,\infty)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.4\ 3.)}$ f $\downarrow$ auf $(-1,0)$ und f $\uparrow$ auf $(0,\infty)$ $\Rightarrow$

$f(x)>f(0)=0\ \ \forall\, x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$ (f hat bei $x_0=0$ ein globales Minimum)

d.h. $(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha x)>0\ \ \forall\, x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$

oder:

$f(x)=(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha x)$, $x\geq -1$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right]$ $\Rightarrow *$,

$\left(f'(0)=0,\ f''(x)=\underbrace{\alpha}_{>1>0}\underbrace{(\alpha-1)}_{>0}\underbrace{(1+x)^{\alpha-2}}_{>0}>0\ \ \forall\, x>-1,\ f''(0)>0\right)$

$*\Rightarrow$ f $\downarrow$ auf $(-1,0)$, f$\uparrow$ auf $(0,\infty)$ $\Rightarrow$ 0 ist globales Minimum von f

$\Rightarrow f(x)>\underbrace{f(0)}_{0}\ \ \forall\, x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$ für $\alpha>1$ und $x>-1$, $x\neq 0$.

A5.1.10 $f_n(x) := \underbrace{\log(\log(...(\log x)))}_{n\ mal}$ für $n \in \mathbb{N}$

a) Wo ist $f_n(x)$ ● definiert und differenzierbar? ● ● Ableitung?

//**D2.3.2**(1452) Die Umkehrfunktion $\log(0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Expotentialfunktion//
// heißt natürlicher Logarithmus oder Logarithmus zur Basis e //
// ($\log x = \ln x$)//
//**S5.1.6** (2755)Folgerungen: //
//Es gilt, dass nachstehende Funktionen auf dem angegebenen Bereich//
//differenzierbar sind: 4.) ● $(\log x)' = 1/x$, $x>0$//
//**S5.1.6** (2750)Differentiationsregeln
//2.)Vor:Sei $f:A \to B$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0) \in \overset{\circ}{B}$, und sei
// $g:B \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.
//Beh: $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.

Lös: ● $f_0(x) = x$, $f_1(x) = \log x$, $f_2(x) = \log(\log x)$, ... $\Rightarrow$
$f_n(x) = \log f_{n-1}(x)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

$f_1(x) = \log x$ definiert & differenzierbar für $x \underset{D2.3.2,\ Folgerungen\ 4.)}{>} 0$

$f_2(x) = \log(\log x)$ definiert & differenzierbar für

$\log x > 0 \underset{D2.3.2}{\Rightarrow} \exp(\log x) > \exp 0 \Rightarrow x > 1$

$f_3(x) = \log(\log(\log x))$ definiert & differenzierbar für
$\log(\log x) > 0 \Rightarrow \log x > 1 \Rightarrow \exp(\log x) > \exp 1 \Rightarrow x > 0$

$f_4(x) = \log(\log(\log(\log x)))$ definiert & differenzierbar für
$\log(\log(\log(x))) > 0 \Rightarrow \log(\log x) > 1 \Rightarrow$
$\exp(\exp((\log x(\log x)) > \exp(\exp 1) = \exp 0 \Rightarrow x > 1$

Für $n \geq 3$: f_n definiert & differenzierbar für

$x > \underbrace{\exp(\exp(....(\exp 1)...))}_{n-2\ mal} \Rightarrow \underbrace{\log(\log(....(\log x)...))}_{n-2\ mal} > 1 \Rightarrow$

$\underbrace{\log(\log(....(\log x)...))}_{n-1\ mal} > 0 \Rightarrow$

$f_n(x) = \underbrace{\log(\overbrace{\log(....(\log x)...)}^{n-1\ mal})}_{n\ mal}$ definiert & differenzierbar für $x > 1$

$f_{n+1} = \log f_n \underset{S5.1.6\ 2.)}{\Rightarrow} f_{n+1}' = \frac{f_n'}{f_n} = \frac{1}{\cancel{f_n}} \frac{f_{n-1}'}{\cancel{f_{n-1}}} = ... \underset{f_0'=1}{=} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{f_k}$

$f_n = \log f_{n-1} \Rightarrow f_n' = \frac{f_{n-1}'}{f_{n-1}}$

b) Zeige: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=0$

Lös: $f_n(x)\uparrow$, $f_n(x) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} \infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(f_n(x))}{f_n(x)} \underbrace{=}_{S5.1.62.)} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}}{f_n'(x)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f_n(x)} = 0$$

A5.1.11 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k$, Wert im Konvergenzintervall?

Hinweis: Betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2}$.

//**S3.1.1**(1601)Die geometrische Reihe ist divergent $\forall$ $z\in K$ mit $|z|>1$.
// Sie konvergiert $\forall$ z mit $|z|<1$ und es gilt
// $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\forall$ $|z|<1$.

//**S3.5.5**(2050) Vor: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hat KR R//

// 1.)dann besitzt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ <u>denselben </u>KR R//

Lös: $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{2}$ *hat* $\underbrace{KR\,1}_{S3.1.1} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.5} \left(\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{2}\right)' = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k*x^{k-1}}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)*x^k}{2}$ *hat KR=1* $\underbrace{\Rightarrow}_{3.5.5}$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)*x^k}{2}\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)*x^{k-1}}{2} =$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)*x^k}{2}$ *hat KR=1 d.h. konvergiert im Intervall(-1,1)* $\Rightarrow$

Für $x\in(-1,1)$ *gilt* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{2} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k}_{\frac{1}{1-x}} -x-1\Big) \underbrace{=}_{S3.1.1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} -1-x\right) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}$ $\Rightarrow$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)}{2} x^k\right)' = \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{2x^2-x^2}{(1+x)^2}$ $\Rightarrow$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} x^k = \left(\frac{1}{2}\frac{2x^2-x^2}{(1+x)^2}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

A5.1.12 Definitionsbereich D, Differentiationsbereich D', 1. Ableitung? $x\in\mathbb{R}$.

a) $f(x)= x^{-\frac{1}{4}}$

*//**S5.1.6** (2750)d) Ist $g(z_0)\neq 0$, $(f/g)'(z_0)=\dfrac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$*

//2.) Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei
// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.
// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.

Lös: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}$, $\nexists$ kein x: $x^2<0$, x=0: $\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{\sqrt{0}}}_{0}}$ nicht definiert. $D=(0,\infty)$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.6\,1.d)} \frac{0*x-1*1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\quad \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$(\sqrt{x})' \underbrace{=}_{S1.5.6\,2.)} 1*\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}*1=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad \forall\ x\in(0,\infty)\qquad \Rightarrow D'=(0,\infty)$$

$$f'(x) \underbrace{=}_{S1.5.6\,2.)} -\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{x}}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{x^5}\quad \forall\ x\in D'$$

b) $g(x)=|ax+b|$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Lös: $D=\mathbb{R}$ da ax+b und |x| definiert $\forall\ x\in\mathbb{R}$,
ax+b diffb $\forall\ x\in\mathbb{R}$,
|ax+b| diffb für $ax+b\neq 0 \Rightarrow x\neq -\dfrac{b}{a}$, $a\neq 0 \Rightarrow$ |ax+b| diffb $\forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{b}{a}\}$
$a=0 \Rightarrow g(x)=|b| \Rightarrow g(x)$ diffb $\forall\ x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow a\neq 0$: g(x) diffb $\forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{b}{a}\}$, a=0 g(x) diffb $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

$$|\xi|' \underbrace{=}_{\xi\in(0,\infty),\xi\neq 0} \xi'=1,\quad |\xi|' \underbrace{=}_{\xi\in(-\infty,0),\xi\neq 0} (-\xi)'=-1 \Rightarrow |\xi|'=\mathrm{sign}(x) \Rightarrow$$

$$g(x)' \underbrace{=}_{S1.5.6\,2.)} (ax+b)'\,\mathrm{sgn}(ax+b)=a*\mathrm{sgn}(ax+b)$$

c) $h(x)=\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{x})}$

Lös: $D=\mathbb{R}\setminus(\{0\}\cup\{\sin(1/x)=0\})=\mathbb{R}\setminus(\{0\}\cup\{1/x=\pi k\})=\mathbb{R}\setminus(\{0\}\cup\{x=(\pi k)^{-1}\})$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

D'=D, da $(\sin(x)\ \&\ 1/x)\neq(0$ und diffb) $\quad h'(x) \underbrace{=}_{S1.5.6\,2.)} -(\sin(\frac{1}{x}))'\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{x})^2}$

$$\underbrace{=}_{S1.5.6\,2.)} -\left(\frac{1}{x}\right)'\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sin(\frac{1}{x})^2}=\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{\sin(\frac{1}{x})^2}=\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2\sin(\frac{1}{x})^2}$$

A5.1.13 *Bestimme alle $x\in R$, in denen die folgende Funktion differenzierbar ist und bestimme dort die Ableitung*

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x<-2\pi \\ \cos x\cdot e^{|x|} & -2\pi\le x\le \pi/2 \\ Ar\sinh x & \pi/2<x<2\sqrt{6} \\ \log(x+5) & 2\sqrt{6}\le x \end{cases}$$

Hinweis: Zeige Arsinh $x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

//(2531)Korollar S4.4.2//
//(..)sinh x: $R\to R$ ist $\uparrow$ und stetig, $f(R)\to R$ d.h. er hat //
// Umkehrfunktion:Arsinh: $R\to R\uparrow$ und stetig.//
// (...)cosh x:$[0,\infty)\to[1,\infty)$ ist$\uparrow$ und stetig und surjektiv, seine //
// Umkehrfunktion Arcosh x:$[1,\infty)\to[0,\infty)$ ist $\uparrow$ und stetig.//
//**S3.6.4**(2150)Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen $\forall$ $z\in C$ gilt://
// $\sinh z=-\sinh(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion, KR $R=\infty$//
//3.)$\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2$ (Additionstheoreme)//
// $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$//
// speziell:$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$//
//**D3.6.4(2150)** Hyperbolische Funktionen//
// $\cosh z:=1/2(e^z+e^{-z})$ $\forall$ $z\in C$(Cosinus hyperbolicus)//
// $\sinh z:=1/2(e^z-e^{-z})$ $\forall$ $z\in C$(Sinus hyperbolicus)//

Lös:Arsinh $x=y$ $\Leftrightarrow$ $x=\sinh y$, $R\to R$, $\underset{KorollarS\,4.4.2}{\uparrow}$ (Arsinh: $R\to R$ $\underset{KorollarS\,4.4.2}{\uparrow}$)

$e^y=1/2(e^y+e^{-y})+1/2(e^y-e^{-y})=\cosh y+\sinh y$, $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$,

$e^y=\sqrt{1+\sinh^2 y}+\sinh y$

$e^{Arsinh\ x}=\sqrt{1+x^2}+x$, Arsinh $x=\log(x+\sqrt{1+x^2})$: $R\to R$,

e^{-x}, $\cos x$, Arsinh x differenzierbar auf R,

$e^{|x|}$ differenzierbar auf $R\setminus\{0\}$,

$\log(x+5)$ differenzierbar auf $(-5,\infty)$

Schnittstellen zwischen den Teilfunktionen:

Allgemein:$f(x)\begin{cases} f_1(x), & x\le a \\ f_2(x), & x>a\end{cases}$ ...f_1,f_2 stetig differenzierbar,

$f(x)$ differenzierbar in a, falls f stetig in a und

$f_2'(a)=f_1'(a)$, d.h. $\lim_{x\to a^+}\frac{f_2(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f_1(x)-f(a)}{x-a}$

-2π: $e^{-(-2\pi)}=e^{2\pi}*\underbrace{\cos(-2\pi)}_{=1}=e^{|-2\pi|}=e^{2\pi}$ $\Rightarrow$ f stetig in -2π.

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $\underset{x\to-2\pi}{\to}$ $-e^{2\pi}$ $\vee$

$(\cos xe^{|x|})'\underset{x<0}{=}(\cos xe^{-x})'=(-\sin xe^{-x}+\cos x(-e^{-x})=$

$(\sin x-\cos x)e^{-x}\begin{cases} \underset{x\to-2\pi}{\longrightarrow}-e^{2\pi} \\ \underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ f differenzierbar in -2π

$(\cos xe^{|x|})'\underset{x\ge 0}{=}(\cos xe^{x})'=(-\sin x+\cos x)e^x\underset{x\to 0}{\to}1$,

f nicht differenzierbar in 0

$(\cos xe^{|x|})$ $\underset{x\to\pi/2}{\to}$ 0 $\vee$ Arsinh $\underset{=\pi/2}{x}>0$ $\Rightarrow$ f ist nicht stetig in $\pi/2$ $\Rightarrow$

f nicht differenzierbar in $\pi/2$

Arsinh $x=\log(x+\sqrt{1+x^2}$ $\underset{x\to 2\sqrt{6}}{\to}$ $\log(2\sqrt{6}+\sqrt{1+24})=\log(5+2\sqrt{6})$,

$\log(5+x) \underset{x\to 2\sqrt{6}}{\rightrightarrows} \log(5+2\sqrt{x}) \Rightarrow f$ *stetig in* $2\sqrt{6}$

$(\operatorname{Arsin} x)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 2\sqrt{6}}{\rightrightarrows} 1/5$

$(\log(5+x))' = \frac{1}{5+x} \to \frac{1}{5+2\sqrt{6}} \Rightarrow$

f nicht differenzierbar in $2\sqrt{6}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x<-2\pi \\ \sin x e^{-x} - \cos x \underbrace{e^{-x}}_{\to -1(x\to 0^+)} & -2\pi \le x < 0 \\ -\sin x e^{x} + \cos x \underbrace{e^{x}}_{\to 1(x\to 0)} & 0<x<\pi/2 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & 0<x<2\sqrt{6} \\ \frac{1}{5+x} & 2\sqrt{6}<x \end{cases}$$

f ist differenzierbar in $R\setminus\{0,\pi/2,2\sqrt{6})$