2.(1200) Kapitel Konvergenz von Folgen und Reihen

$\mathbb{K}$ steht im Folgenden immer für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Bez:Eine Abbildung φ: $\mathbb{N}\rightarrow\begin{Bmatrix} C \\ R \end{Bmatrix}$ heißt $\begin{Bmatrix} \text{komplexe} \\ \text{reelle} \end{Bmatrix}$ Zahlenfolge $\begin{Bmatrix} (z_n) \\ (a_n) \end{Bmatrix}$ wobei $\begin{Bmatrix} z_n=\phi(n) \\ a_n=\phi(n) \end{Bmatrix}$ $n\in\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{N}_0$.

2.1(1200) Konvergenz und Grenzwert

D2.1.1(1200) Eine Folge$(z_n)=(z_n)_n^{\infty}\subset\mathbb{K}$ heißt konvergent $\Leftrightarrow$ $\exists$ $z\in\mathbb{K}$, sodass gilt $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|z_n-z|<\varepsilon$ $\forall$ $n\geq n_0$.

Dann heißt z der Grenzwert oder Limes der Folge (z_n).

Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Formulierung zu Nullfolge:

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{K}$ heißt eine Nullfolge, falls gilt:

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$: $n\geq N \Rightarrow |z_n|<\varepsilon$.

Ist dies der Fall, so sagen wir auch, dass (z_n) gegen 0 strebt oder gegen 0 konvergiert, und wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ oder $z_n\to 0\,(n\to\infty)$.

Eine Folge (z_n)heißt konvergent, wenn ein $z\in\mathbb{K}$, existiert, für welches die Folge (z_n-z) eine Nullfolge ist. Ein solches z heißt dann Grenzwert der Folge: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \Leftrightarrow (z_n-z)$ ist Nullfolge für $(n\to\infty)$

Wir schreiben dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$ oder $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$

Wir nennen die Folge (z_n) beschränkt, falls es ein $K\in\mathbb{R}_+$ gibt mit $|z_n|\leq K$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

Bez:a) $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$

b) $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ sei eine Aussage $A_{(n)}$ festgelegt. Wir sagen dann:

(.) $A_{(n)}$ gilt für fast alle n, falls ein $n_0\in\mathbb{N}$ existiert, sodass $A_{(n)}$ $\forall$ $n\geq n_0$ richtig ist (Bsp Konvergenz Def).

Andere Formulierung:

$A_{(n)}$ gilt für fast alle $n\in\mathbb{N}$: $\Leftrightarrow$ $A_{(n)}$ gilt für $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

(..) $A_{(n)}$ gilt für ∞ viele n, falls $|\{n\in\mathbb{N}|\ A_{(n)} \text{ ist richtig}\}|=\infty$

Bsp: $a_n=\begin{cases} 1/n & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl} \\ 1 & \text{falls } n \text{ Quadratzahl} \end{cases}$

Bem:1.) Für ein $a\in\mathbb{R}$ und $\varepsilon>0$ heißt Intervall $U_\varepsilon(a):=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

eine ε Umgebung von a

x x | a-ε | a | a+ε | x x x → # $a-\varepsilon, a+\varepsilon \notin U_\varepsilon(a)$

$a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, sodass $a_n\in U_\varepsilon(a)\ \forall\ n\geq n_0$ d.h.:

$a_n \notin U_\varepsilon(a)$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0$ liegen nur endlich viele $a_n \notin U_\varepsilon(a)$

(außerhalb der ε Umgebung von a)

Bem: $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ sind gleich $\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0: |z_1-z_2|<\varepsilon$

4.) Eine Nullfolge ist konvergent; ihr Grenzwert ist gleich 0

5.) Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\neq 0 \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0:\ x_n\neq 0$

6.) $x_n, y_n\in\mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, $x_n\leq y_n\ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow x\leq y$

7.) Sandwhichsatz

Seien (x_n^+), (x_n^-) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^- = x$ und $x_n^- \leq y_n \leq x_n^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

8.) Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile beide konvergieren.

Andere Formulierung:

Für eine komplexe Zahlenfolge z_n gilt

(.) $z_n\to z\ (n\to\infty) \Rightarrow |z_n|\to|z|\ (n\to\infty)$

Bew: $\varepsilon>|z_n|-|z| \geq ||z_n|-|z||\ \ \forall n\geq n_0(\varepsilon)$

(..) $z_n\to z\ (n\to\infty) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_n)\to\mathrm{Re}(z)\ (n\to\infty)$ und $\mathrm{Im}(z_n)\to\mathrm{Im}(z)\ (n\to\infty)$ oder

Für $(z_n)\subset\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}\ z$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}\ z$

Bem: Insbesondere hat eine reelle Zahlenfolge, welche konvergent ist (gemäß unserer Def) einen reellen und eindeutigen Grenzwert

9.) Divergenz: $\forall\ z\in\mathbb{C}\ \exists\ \varepsilon>0\ \forall\ n_0(\varepsilon\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \exists\ n\geq n_0: |z_n-z|\geq\varepsilon$.

D2.1.2 (1209) Eine komplexe Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ heißt beschränkt: $\Leftrightarrow$
$\exists\ K>0$ mit $|z_n|\leq K\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

S2.1.1 (1210) Geg die Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{K}$. Dann gilt:

a) Ist (x_n) Nullfolge und gibt es $C\in\mathbb{R}_+$ und $n_0\in\mathbb{N}$, so dass $\forall\ n\geq n_0$ gilt $|y_n|\leq C|x_n|$, dann ist auch (y_n) eine Nullfolge.

b) Ist (x_n) eine Nullfolge und ist (y_n) beschränkt, so ist $(x_n y_n)$ ebenfalls eine Nullfolge

c) Sind beide Folgen Nullfolgen, so ist auch (x_n+y_n) eine Nullfolge.

d) Ist (x_n) eine Nullfolge und ist $m\in\mathbb{N}$, so ist auch $\sqrt[m]{|x_n|}$ Nullfolge

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Nach Vor $\exists\ N\in\mathbb{R}_+$, sodass $|x_n|<\varepsilon^m$ ist, falls nur $n\geq N$.
Daraus folgt die Beh.

D2.1.3(1250) Eine Folge (z_n) in **K** heißt Cauchyfolge, wenn gilt:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbb{N}: n,m\geq N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$

S2.1.2(1250) Eigenschaften konvergenter Folgen
Vor: Seien $(a_n),(b_n),a,b$ aus **R**, $(z_n),(w_n),w,z,z_0$ aus **C**, konvergent mit
$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$, $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, $w_n \xrightarrow{n\to\infty} w$.
Beh:
1.) Jede konvergente Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt

Bem.: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \Rightarrow z_n$ beschränkt, aber
$z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \not\Leftarrow z_n$ beschränkt. Bsp: $z_n=(-1)^n$.

2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge, d.h.
(*) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0$

Andere Formulierung im Zusammenhang mit Häufungswerten siehe Seite 1503:
Bem: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|\leq\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$
$z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \underbrace{\Leftarrow}_{S2.2.5} \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|\leq\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$
3.) $z_{n+1}-z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ und $z_{2n}-z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$
4.) $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|=|z|$
5.) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n+w_n)=z+w$
6.) $\lim\limits_{n\to\infty} (cz_n)=cz\ \forall\ c\in\mathbb{C}$
7.) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_nw_n)=zw$
Andere Formulierung:
$\lim\limits_{n\to\infty} (z_nw_n)=zw$

8.) $b\neq0 \Rightarrow |b_n|>|b|/2$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)$.
Andere Formulierung:
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{z_n}{w_n}\right)\to\left(\frac{z}{w}\right)$ $(n\to\infty)$, $w\neq0$
Bem: Gewisse w_n können 0 sein:
$\varepsilon_0:=|w|$ und $|w_n-w|<\varepsilon_0/2\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon_0/2) \Rightarrow$
$|w_n|\geq\varepsilon_0/2\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon_0/2)$

Bem: a) Seien alle $z_n\neq0$, und gelte $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z\neq0$. Dann ist auch
die Folge der Kehrwerte $(1/z_n)$ konvergent, und $\lim\limits_{n\to\infty} 1/z_n=1/z$
b) Es reicht $w\neq0$: $\varepsilon_0:=|w|$ $\forall$ $|w_n-w|<\varepsilon_0/2\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$
$|w_n|\geq\varepsilon_0/2\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon/2)$

9.) Gilt $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ folgt für jedes feste $k\in\mathbb{N}$:
(.) $z_n^k\to z^k$ (..) $z_n^{-k}\to z^{-k}$ falls $z\neq0$, $z_n\neq0\ \ \forall\ n$
10.) Gilt $z_n=z_0\ \forall\ n\geq n^*$ $(n^*\in\mathbb{N})$ so folgt $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0$

11.) $z_n=z/n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ mit $z\in\mathbb{C}$ gilt: $z_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$

12.) Für $z_n=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, mit einem $z\in U_1(0)$ gilt: $z_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$

Bem: $z_n=nz^n$, $z\in U_1(0)$, Beh $z_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$

Bew: $|z|=\frac{1}{1+r}$, $|nz^n-0|=\frac{n}{(1+r)^n}\le\frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}r^2\ldots}$

n_0 bestimmen

13.) Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in\mathbb{N}_0$ mit $z\in U_1(0)$ gilt $z_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{1-\underbrace{z}_{<>1}}$, geom Reihe

S2.1.3 (1255) Vor: Seien (a_n), (b_n), (c_n) Folgen aus $\mathbb{R}$ mit $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $b_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} b$, $\alpha\in\mathbb{R}$

#beachten: Vor gelten für alle folgenden Punkte!!!!!!!!!!

Beh:

1.) $a_n\le\alpha$ $(\ge\alpha)$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N} \Rightarrow a\le\alpha$ $(a\ge\alpha)$

Bem: $a_n<\alpha$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N} \not\Rightarrow a<\alpha$ sondern $a\le\alpha$

2.) $a_n\le b_n$ $(a_n\ge b_n)$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N} \Rightarrow a\le b$ $(a\ge b)$

3.) $a_n\le c_n\le b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ und $a=b \Rightarrow c_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $b_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} b=a$

2.2(1300) Reelle, insbesondere monotone Folgen

(Aufgaben stehen manchmal nicht unmittelbar hinter Sätzen)

D2.2.1(1300) Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend:
$\Leftrightarrow a_n \le a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$.
Bez $a_n \nearrow$, $a_n \searrow$
(a_n) aus $\mathbb{R}$ heißt (streng) monoton fallend : $\Leftrightarrow a_{n+1} \le a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$
Bez: $a_n \uparrow$, $a_n \downarrow$

D2.2.2(1300)
Eine Folge (b_n) heißt Teilfolge der Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$: $\Leftrightarrow$
$\exists$ eine Folge $(\nu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ mit $\nu_n < \nu_{n+1}$ und $b_n = a_{\nu_n}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$
$(b_n) = (a_{\nu_n}) = (a_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wenn $\nu_n < \nu_{n+1}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Andere Formulierung:
Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbb{K}$.
Sei $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt die Folge $(x_{\phi(n)})$ eine Teilfolge von (x_n)
ϕ (streng monoton wachsend): $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ...also ϕ z.B.nicht $\sqrt{n}$, aber $\phi(n) = 2n$

Andere Formulierung:
Eine komplexe Folge (w_n) heißt Teilfolge einer komplexen Folge (z_n), wenn es eine streng monoton wachsende Folge von Zahlen n gibt, sodass gilt: $w_n = z_{\nu_n}$ $\forall\ n$

D2.2.3(1300) Sei $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv.
Dann heißt die Folge $(x_{\phi(n)})$ eine Umordnung von (x_n)

D2.2.4(1300) Sei (y_n) eine Folge aus $\mathbb{K}$ mit $y_n = x_n$ für alle $n \ge n_0$.
Dann heißt (y_n) eine triviale Abänderung von (x_n).

S2.2.1(1301)
Vor:Sei z_n konvergent mit $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$
Beh:Jede (.)Teilfolge (z_{ν_n}) von (z_n), (.) Umordnung und (..)triviale Abänderung ist konvergent mit $z_{\nu_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$
Bem:$a_n \nearrow$ und (a_n) beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

S2.2.4(1308) Bolzano Weierstraß (BW)(siehe auch S2.4.1)
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

S2.2.5(1308)Konvergenzkriterium von Cauchy
(ist notwendig und hinreichend).
Eine komplexe Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ist <u>genau dann</u> konvergent, wenn sie das Cauchy Kriterium erfüllt:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: |z_n - z_m| < \varepsilon\ \ \forall\ n, m \ge n_1(\varepsilon)$ $\Leftrightarrow$
$Re(z_n)$ und $Im(z_n)$ sind Cauchyfolgen.
Bem: (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) Jede relle Cauchy Folge konvergiert in $\mathbb{R}$ und eine rationale Cauchy Folge hat einen rellen aber im allgemeinen keinen rationalen Limes.

D2.2.5(1309) Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{R}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw $-\infty$): $\Leftrightarrow$ $\forall$ $K\in\mathbb{R}$ $\exists$ $n_K\in\mathbb{N}$ mit $a_n \underset{(\leq)}{\geq} K$ $\forall$ $n\geq n_K$, und man schreibt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty(-\infty)$ bzw $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty(-\infty)$

Andere Formulierung:

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞, wenn gilt: $\forall$ $K\in\mathbb{R}_+$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$: $n\geq N \Rightarrow x_n\geq K$

Bez: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ oder $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} -x_n=\infty \Rightarrow$ Folge (x_n) ist bestimmte divergent gegen $-\infty$.

Bem:1.) Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge $\left(a_{v_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ von (a_n) mit $|a_{v_n}| \underset{n\to\infty}{\to} \infty \nearrow$

2.) Eine monotone Folge ist entweder konvergent oder uneigentlich konvergent

3.) Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ und $a_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$. Dann gilt: $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

S2.2.6(1315) **(**Division durch Multiplikation und Addition)

Vor: Sei $c>0$, $0<a_0<1/c$ und die Folge (a_n) sei induktiv (rekursiv) definiert durch $a_{n+1}:=a_n(2-ca_n)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$

Beh: $a_n \nearrow$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1/c$

S2.2.7(1315) Wurzelziehen durch Division und Multiplikation und Addition

Vor: Sei $c\geq 1$ (falls $0<c<1$, so betrachte $1/c$), $a_0>\sqrt{c}$ und die Folge (a_n) sei induktiv definiert durch * $a_{n+1}:=1/2(a_n+\frac{c}{a_n})$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$

Beh: $a_n \searrow$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{c}$

Bem: $a,b>0$, A1.2.9 d): $0<\sqrt{ab}\leq 1/2(a+b) \Rightarrow a_{n+1}=1/2(a_n+\frac{c}{a_n})\geq\sqrt{a_n \frac{c}{a_n}}=\sqrt{c}$

S2.2.8(1318) (AGM Verfahren...arithmetisch/geometrisches Mittel)

Vor: Sei $0<a\leq b$, $a_0:=a$, $b_0:=b$, und die Folgen $(a_n),(b_n)$ seien induktiv definiert durch

$a_{n+1}:=\sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1}:=\frac{a_n+b_n}{2}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

Beh: $I_n:=[a_n,b_n]\subset[a,b]$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ ist eine Intervallschachtelung mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=:\alpha\in\mathbb{R}$

(α heißt das arithmetisch- geometrische Mittel von a,b: $\alpha=M(a,b)$).

Bem: $a=b \Rightarrow \alpha=a=b$

2.3(1400) **Expotential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen**

Bem:Stetige Verzinsung und natürliches Wachstum
Sei x der Zinssatz bzw Wachstumsrate /Jahr, K_0 =Ausgangskapital.
Jährl Verzinsung x, Kapital nach 1 Jahr $K_0(1+x)$
Monatl Verzinsung x/12, Kapital nach 1 Jahr $K_0(1+x/12)^{12}$
Tägl Verzinsung x/365, Kapital nach 1 Jahr $K_0(1+x/365)^{365}$
Allgemein $(1+x/n)^n$, $n\in\mathbb{N}$

#**S2.3.1**(1400) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r_n, r\in\mathbb{Q}$, $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} r \Rightarrow a^{r_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a^r$

#**S2.3.2**(1400) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r_n, s_n\in\mathbb{Q}$, $\rho\in\mathbb{R}$, $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \rho$: $a^\rho := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$

#**S2.3.3**(1401) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $x_n, x\in\mathbb{R}$!!!, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \Rightarrow a^{x_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a^x$

#**S2.3.4**(1401) $a, x\in\mathbb{R}$, $a>0$: $x \mapsto a^x>0$ $\wedge$ $\uparrow$ falls $a>1$, $\downarrow$ falls $0<a<1$

#**S2.3.5**(1401)$g>1$, $a>0$, $g^x=a \Leftrightarrow \exists_1\, x=: \underbrace{{}^g\log a}_{Definition} \in\mathbb{R}$

S2.3.6(1401) $x_n, x, g\in\mathbb{R}$, $x_n, x>0$, $g>1$, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \Rightarrow {}^g\log x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} {}^g\log x$

S2.3.7(1402) $x_n, x, \rho\in\mathbb{R}$, $x_n>0$, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x>0$: $x_n^\rho \underbrace{\to}_{n\to\infty} x^\rho$

S2.3.8(1402) Vor:$x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, $n>-x$, $x_n=(1+x/n)^n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$
Beh: (x_n) $\uparrow$

S2.3.9 (1403)$b_n:=(1+1/n)^{n+1}$ $\searrow$

Bem: a_n wie in S2.3.8 Andere Formulierung
Nun gilt $a_n(1)\le b_n\le b_1=(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{1})^{1+1}=4$ für $n\ge1$ und mit $m=[x]+1$ auf Grund der Monotonie von $(a_n(m))$
$0<a_n(x)\le(1+\frac{m}{n})^n\le(1+\frac{m}{nm})^{mn}=(a_n(1))^m\le4^m$ für $n\ge1$, kurz $0<a_n(x)\le4^m$ für $n\ge1$
$\Rightarrow$ $a_n(x)$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{(a_n)\ monoton}$ $(a_n(x))$ ist Cauchyfolge

S2.3.10(1403)$[(1+1/n)^n, (1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung mit $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=:e$, $n\in\mathbb{N}$ d.h. $2{,}37<e<3{,}16$

S2.3.11(1403)$x\in\mathbb{R}$ & $x_n=(1+x/n)^n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$: (x_n) beschränkt

S2.3.12(1404) $z\in\mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ existiert.

S2.3.13(1404)$|(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n-(1+z)|\le|z|^2(1+\frac{|z|}{n-2})^{n-2}\le|z|^2 4^{[|z|]}+1$ $\forall$ $n\ge3, z\in\mathbb{C}$

S2.3.14(1405) $\forall$ $(w_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, $w_n\in\mathbb{C}$ gilt $(1+\frac{w_n}{n})^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$

S2.3.15(1406) $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ $\exists$ $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=:\exp(x)$
siehe auch S2.3.18 5.)

S2.3.16(1407) $x_n\in\mathbb{R}$, $(x_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, $x_n\neq0$ $\wedge$ $x_n>-1$ #für große n#: $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$

S2.3.17(1408) $(1+x/n)^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} e^x \ \forall\ x\in R.$

//***2.3.16*** *(1407)* $(x_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0,\ x_n\neq 0 \wedge x_n>-1,\ x_n\in R$: $\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e$//

D2.3.1(1408)

(.) Die relle Zahl $e:=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ heißt die Eulersche Zahl

(..) Für $x\in R$ definieren wir die reelle Expotentialfunktion $\exp_{|R}(x))=e^x \underbrace{=}_{*} \lim_{n\to\infty}((1+x/n)^n)$ einer reellen Veränderlichen durch

$\exp: R \underbrace{\to}_{S2.3.11\ 1.)} R_+,\ x \xrightarrow[Abbildung]{} \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ (\exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n)$

(..) Für $z\in C$ $(x\in R)$ definieren wir die komplexe Expotentialfunktion $\exp(z)=e^z \underbrace{=}_{**} \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$ einer komplexen Veränderlichen durch

$\exp: C\to C,\ z \xrightarrow[Abbildung]{} \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$

* Bew für $x\in Q$ ohne S2.3.15 in S2.3.16 6.)

** Bew siehe S3.6.1 $\lim_{n\to\infty}((1+z/n)^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ und S5.3.1 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Bem: e=2,7182818...irrational, transzendent

S2.3.18(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion

Für z,w∈C, x∈R gilt

1.) (.)$\exp(0)=e^0=1$

(..)$\exp(x)>0$

2.) $e^z\neq 0$ ∀ z∈C :$e^{-z}=1/e^z$

3.) $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)$ ∀ x,y∈R bzw

$\exp(z)\exp(w)=\exp(z+w)$,auch $e^z e^w=e^{z+w}$ ∀ z,w∈C

Additionstheorem oder Funktionalgleichung

4.) $|e^z-(1+z)|\leq |z|^2 e^{|z|}$ ∀ z∈ C

5.) ∀ x∈R ∃ $\exp(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=\dfrac{1}{\exp(-x)}$, $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

Siehe auch **S2.3.15**, jetzt u.a. Einbeziehung Def exp

6.)(.)$\exp(m)=e^m$ ∀ m∈Z, (..)$\exp(1/k)=e^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{e}$ ∀ k∈N,

(...)$\exp(r)=e^r$ ∀ r∈Q (siehe auch A2.3.5)

Bem:siehe jedoch *//S2.3.17(1408)*$(1+x/n)^n\to e^x$ ∀ x∈R.//

7.) $1+x\leq\exp(x)$ ∀ x∈R, $\exp(x)\leq\dfrac{1}{1-x}$ ∀ x<1

8.) x<y ⇔ exp(x)<exp(y) (strenge Monotonie)

9.) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$, $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$, $|e^z|=1$ ⇔ Re(z)=0

10.)$a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \exp(a_n)\underset{n\to\infty}{\to}\exp(a)$(Stetigkeit) a=±∞ erlaubt

speziell $\exp(1/n)\underset{n\to\infty}{\to} 1$, $\exp(n)\underset{n\to\infty}{\to}\infty$, $\exp(-n)\underset{n\to\infty}{\to} 0$

Bem:$x_n\underset{n\to\infty}{\to}\infty \Rightarrow e^{x_n}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$, $e^{x_n}\geq 1+x_n$

$x\underset{n\to\infty}{\to}-\infty \Rightarrow e^{x_n}\underset{n\to\infty}{\to} 0$, $e^{x_n}=\dfrac{1}{e^{-x_n}}\underset{n\to\infty}{\to} 0$

11.)Für n≥2, n∈N gilt immer $e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<ne\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Siehe auch D2.3.3 Bsp 5.) (1455)

12.)$(1+z/n)^n$ ist Cauchy Folge ∀ z∈ C.

S2.3.19(1451)
Vor: $y>0$ Beh $\exists\ x\in\mathbb{R}$: $e^x=y$
Aussage: Die Funktion exp: $\mathbb{R}\to(0,\infty)$ ist bijektiv ($\exp(x)=e^x$)

D2.3.2(1452) Die bijektive Funktion zu exp: $\mathbb{R}\to(0,\infty)$ ist definiert durch
$\exp(x)=e^x:=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ heißt (natürliche)
Expotentialfunktion mit Basis $e:=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$.
Die Umkehrfunktion $\log(0,\infty)\to\mathbb{R}$ der Expotentialfunktion heißt natürlicher Logarithmus oder Logarithmus zur Basis e
($\log x=\ln x$)
Bem: $\log e^x=x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. $\exp(\log y)=y\ \ \forall\ y>0$, $\log 1=0$

S2.3.20(1453) Eigenschaften des Logarithmus
1.) $\log e^x=x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $e^{\log y}=y\ \forall\ y>0$.
Log $1=\log e^0=0$, $\log e=\log e^1=1$
2.) $0<x<y \Leftrightarrow -\infty<\log x<\log y$; $x,y\in\mathbb{R}$, (streng monoton wachsend)
3.) $\log(x\cdot y)=\log x+\log y\ \forall\ x,y>0\ x,y\in\mathbb{R}$, Additionstheorem oder Funktionalgleichung
$\log 1/x=-\log x$
4.) (.) $a^k=e^{k\log a}\ \forall\ a>0,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$.
(..) $a^r=e^{r\log a}\ \forall\ a>0,\ r\in\mathbb{Q}$.
5.) $\sqrt{x}=e^{\frac{1}{2}\log x}$, $a^{1/n}:=\sqrt[n]{a}=e^{\frac{1}{n}\log a}\ \forall\ a>0$ und $n\in\mathbb{N}$,
6.) (.) $1-1/x\le\log x\le x-1\ \forall\ x>0$.

7.) $a,a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \log a_n \underset{n\to\infty}{\to} \log a$ Stetigkeit

Bem: Aus 2.) $\log x>0\ \forall\ x>1$, $\log x<0\ \forall\ x: 0<x<1$,
$x_n\to\infty(0) \Rightarrow \log x_n\to\infty(-\infty)$

D2.3.3(1454)
Für $a>0$ sei $a^b:=e^{b\,{}^e\log a}\ \forall\ b\in\mathbb{R}$ (Potenz zur Basis a mit Exponenten b.
Siehe S2.3.18 5.) Bew für $b\in\mathbb{Q}$ #aber $b\in\mathbb{R}$???#
#S2.3.*5* ${}^e\log a^b=b*{}^e\log a \Leftrightarrow a^b=e^{{}^e\log a^b}=e^{b\,{}^e\log a}$
$\log_a b:=\dfrac{\log b}{\log a}\ \forall\ b\in\mathbb{R}$, $b>0$, $a\neq1$ Logarithmus von b zur Basis $a\neq0$.
Bem: $y=a^b=e^{b\,{}^e\log a} \Leftrightarrow {}^e\log y=b*{}^e\log a \Leftrightarrow b=\dfrac{{}^e\log y}{{}^e\log a}={}^a\log y \Leftrightarrow b={}^a\log y$
Hinweis: Verwendet im Bew S2.3.15
Bez: $\sqrt[n]{a}:=a^{1/n}:=\exp(1/n\log a)$ für $a>0$. $\sqrt[n]{0}:=0$

D2.3.4(1456)
(.) Für $a>0$ heißt $a^x: \mathbb{R}\to(0,\infty)$, $x\ \ a^x$ die allgemeine Expotentialfunktion zur Basis $a>0$, $a\neq1$
(..) $\log_a: (0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\ \ \log_a x$ heißt die Logarithmusfunktion zur Basis $a>0$, $a\neq1$
(...) $x^\alpha: (0,\infty)\to(0,\infty)$ heißt allgemeine Potenzfunktion mit Potenz

$\alpha \in \mathbb{R}$.

($a^x = e^{x \log a}$, $\log_{(a)} x = \dfrac{\log x}{\log a}$, $x^\alpha = e^{\alpha \log x}, x>0, \alpha \in \mathbb{R}$)

(1456)Eigenschaften dieser Funktionen:
Mit $x,y,a,b \in \mathbb{R}$, $a,b>0$ gilt

1.) $a^x a^y = a^{x+y}$
2.) $(a^x)^y = a^{xy}$

3.) $a^x b^x = (ab)^x$
4.) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $(x,y \in (0,\infty))$ Funktionalgleichung
5.) $\log_a y: (0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von a^x, $a \neq 1, \mathbb{R} \rightarrow (0,\infty)$
//#Bem: 3.) ${}^g\log a^\rho = \rho * {}^g\log a$//

7.) $\log a^x = x \log a$

S2.3.21(1460)Wichtige Grenzwerte

1.) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $\forall$ $a \geq 0$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$

4.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{e^n} = 0$ $(p>0)$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{(e/n)^n}} \rightarrow 1$ $\qquad \underbrace{\sqrt[n]{n * e}}_{\xrightarrow{1.),2.)} 1}$

6.) Vor: $x \in \mathbb{R}$, $|x|>1$

Aussage: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$

2.4(1500) **Häufungswerte (HW) von Zahlenfolgen**

D2.4.1'(1500)

1.) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.

$z \in \mathbb{C}$ ist HW von (z_n) $\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_{v_n} = z$

Bem: Falls $z_n \rightarrow z$, d.h. konvergent, so besitzt sie nur 1 HW.

2.) $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ ist $M \cap \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$.

siehe auch 4.1 Seite 2201

\# $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \Leftrightarrow$

\# $\exists\ (z_{n_k})_{k,n\in\mathbb{N}}:\ z_{n_k} \neq z\ \forall\ k\in\mathbb{N}\ \&\ z_{n_k} \underbrace{\to}_{k\to\infty} z$

\# äquivalent

\# $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \infty$ viele $n\in\mathbb{N}$: $z_n\neq z\ \&\ z_n\in U\varepsilon(z)$

\# äquivalent

\# $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{o}{U}_{\varepsilon}(x_0)\neq\emptyset$.

D2.4.1''(1501)
Sei $(z_n)\subset \mathbb{K}$. Ein $z\in\mathbb{K}$ heißt Häufungswert (HW) von (z_n): $\Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0$ gilt $|z_n-z|<\varepsilon$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0$ gilt $z_n\in U_\varepsilon(z)$ für ∞ viele n.
(Bew der Verbindung D2.4.1'' aus D2.4.1')

Bem: $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n \Rightarrow z$ ist HW von (z_n)

S2.4.1(1502)Bolzano Weierstrass (BW)
Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ beschränkt
Beh: (a_n) hat mindestens einen HW $a\in\mathbb{R}$ und eine gegen a konvergente Teilfolge. $(-k\le a_n\le k\ \forall\ n\in\mathbb{N})$

Andere Formulierung (keine Einschränkung auf $\mathbb{R}$)
Eine beschränkte Folge hat <u>mindestens</u> einen HW.

S2.1.2 2.)(1504) Seite 1250 andere Formulierung
Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.
$(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N\ \forall\ n,m\in N: n,m\ge n_0(\varepsilon)\in N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$.
Bem: Jede reelle Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{R}$ und eine rationale Cauchyfolge hat einen reellen, aber im allgemeinen keinen rationalen Limes.
Beachte: Konvergenz kann gezeigt werden, auch wenn Grenzwert nicht bekannt ist

S2.4.2 (1505)
Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ beschränkt und H die Menge aller HW von (a_n)
$(\underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1} H\neq\emptyset)$
Beh: $\exists$ min H und max H.

Bem:1.) Ist (a_n) $a_n\in\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, so $\exists$ eine Teilfolge von der Gesamtfolge (a_n) mit $a_{\nu_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$,

$\forall\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ \nu_n$ mit $a_{\nu_n}>n$, $\nu_{n+1}>\nu_n \Rightarrow a_{\nu_n}\underbrace{\to}_{n\to\infty}\infty$

2.) Ist $H=\emptyset$ und $a_n\in\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so gilt
$a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} -\infty$
Beh: $\forall \underbrace{k}_{\text{noch so große}} >0\ \exists\ n_0(k)\in\mathbb{N},\ a_n\le -k\ \forall\ n\ge n_0(k)$

In **D2.4.2′** und **D2.4.2′′** wird definiert.
Beginn mit **D2.4.2′**: **D2.4.2′′** wird mit Hilfe von **D2.4.2′** wie ein Satz bewiesen.
Beginn mit **D2.4.2′′**: **D2.4.2′** wird mit Hilfe von **D2.4.2′′** wie ein Satz bewiesen.

D2.4.2′(1507)

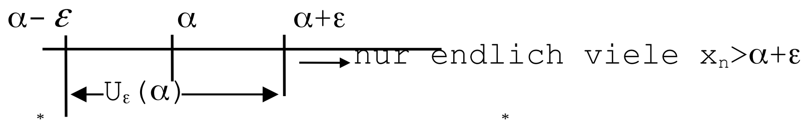
Für eine Folge $(x_n)\subset\mathbb{R}$ heißt

$$\overset{*}{x} := \begin{cases} \max H, \textit{falls}(x_n) \textit{nach oben beschränkt und } H\neq\emptyset \\ \infty, \textit{falls}(a_n) \textit{nach oben unbeschränkt} \\ -\infty, \textit{falls}(a_n) \textit{nach oben beschränkt und } H=\emptyset \end{cases}$$

der limes superior der Folge (x_n), $\overset{*}{x} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$

$$\underset{*}{x} := \begin{cases} \min H, \textit{falls}(x_n) \textit{nach unten beschränkt und } H\neq\emptyset \\ -\infty, \textit{falls}(a_n) \textit{nach unten unbeschränkt} \\ \infty, \textit{falls}(a_n) \textit{nach unten beschränkt und } H=\emptyset \end{cases}$$

der limes inferior der Folge (x_n), $\underset{*}{x} = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$



$\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon>0\ x_n\in U_\varepsilon(\overset{*}{x})$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ und

$x_n > \overset{*}{x}+\varepsilon$ für endlich viele $n\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ gilt $x_n>\overset{*}{x}-\varepsilon$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ und $x_n<\overset{*}{x}+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ (#es fehlen nur die endlich vielen $x_n>\overset{*}{x}+\varepsilon$)

D2.4.2′′(1508)

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $\overset{*}{x}$ heißt dann der größte HW oder limes superior der Folge (x_n), wenn gilt:

$$\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt: } \begin{cases} x_n \geq \overset{*}{x}+\varepsilon \textit{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon \textit{ für } \infty \textit{ viele } n \end{cases},$$

oder gleichbedeutend

$$\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt } \begin{cases} x_n \leq \overset{*}{x}+\varepsilon \textit{ für fast alle } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon \textit{ für } \infty \textit{ vielen } n \end{cases}$$

wir schreiben auch $\overset{*}{x} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Offenbar ist $\overset{*}{x}$ ein HW von (x_n) und ein $x>\overset{*}{x}$ ist kein HW von (x_n). Insbesondere folgt aus der Existenz eines limes superior, dass die Folge nach oben beschränkt sein muß.

Eine Zahl $\underset{*}{x}$ heißt entsprechend der kleinste HW oder limes inferior der Folge (x_n), wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon>0: \begin{cases} x_n \leq \underset{*}{x}-\varepsilon \textit{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \leq \underset{*}{x}+\varepsilon \textit{ für } \infty \textit{ viele } n \end{cases},$$

oder gleichbedeutend

$$\underset{*}{x} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt } \begin{cases} x_n \geq \underset{*}{x}-\varepsilon \textit{ für fast alle } n \\ x_n \leq \underset{*}{x}+\epsilon \textit{ für } \infty \textit{ viele } n \end{cases}$$

wir schreiben auch $\underset{*}{x} = \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Auch $\underset{*}{x}$ ist ein HW von (x_n) und jedes $x<\underset{*}{x}$ ist kein HW von (x_n), und der limes inferior kann nur existieren, wenn die Folge nach unten beschränkt ist.

S2.4.3(1509) Eine beschränkte Folge $(a_n)\subset \mathbb{R}$ $|a|\le k$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ ist genau dann konvergent, wenn $|H|=1$, d.h. $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |H|=1 \Leftrightarrow$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$, $a_n\in\mathbb{R}$

Andere Formulierung (auch für komplexe Zahlen):

$(z_n)\subset\mathbb{C}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ (z_n) ist beschränkt (d.h. $\exists$ $K>0$ mit $|z_n|\le K$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$) und hat höchstens einen HW.

(Bew wie bei $\mathbb{R}$)

Bem:

1.)Es gilt stets $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ und $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\ge n} x_k)$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\ge n} x_k)$

2.) $(x_n)\subset\mathbb{R}$ $\wedge$ $\alpha\in\mathbb{R}$:

$\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ gilt $x_n\in U_\varepsilon(\alpha)$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n\ge\alpha+\varepsilon$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}$
(sonst gäbe es einen HW $\beta\ge\alpha+\varepsilon$)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ gilt $x_n>\alpha-\varepsilon$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n<\alpha+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

$\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ gilt $x_n\in U_\varepsilon(\alpha)$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n\le\alpha+\varepsilon$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}$
(sonst gäbe es einen HW $\beta\ge\alpha-\varepsilon$)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ gilt $x_n<\alpha+\varepsilon$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n>\alpha+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

3.)(siehe auch 1.))Eine Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ besitzt immer einen größten und einen kleinsten HW und diese sind eindeutig bestimmt. Es gilt immer $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, und das = gilt genau dann, wenn die Folge konvergiert oder bestimmt divergiert. In diesem Fall ist dieser gemeinsame Wert gleich dem Grenzwert der Folge.

4.)Es gilt stets $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

2.5 Doppelfolgen

Bezeichnung
$\mathbb{Z}^2=\{(m,n)|n,m\in\mathbb{Z})\}$: Menge der ganzzahligen Gitterpunkte im $\mathbb{R}^2$.
$(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ werden oft als Indizes verwendet und heißen dann Doppelindices.
Auch $\mathbb{N}^2=\{(m,n)|n,m\in\mathbb{N})$, $\mathbb{N}_0^2=\{(m,n)|m,n\in\mathbb{N}_0)\}$.

D2.5.1(1550) Doppelfolge reeller Zahlen
Abbildung a: $\mathbb{N}^2\mapsto\mathbb{R}$: $(n,m)\mapsto a_{nm}$, $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$

D2.5.2(1550)
$(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ heißt konvergent:
$\exists\ a\in\mathbb{R}$ sodass $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|a_{nm}-a|<\varepsilon\ \forall\ n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq N$
Bem: Limes oder Doppellimes a ist eindeutig bestimmt.
$a=\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}$ oder $a_{nm}\underset{n,m\to\infty}{\to} a$
Bew entsprechend Bew zu *//**D2.1.1**(1200) Bem: 3.)//*

S2.5.1(1550) Cauchysches Konvergenzkriterium
$(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|a_{n'm'}-a_{nm}|<\varepsilon\ \forall\ n,n',m,m'\geq N$ oder
$\forall\ n'\geq n\geq N$ und $m'\geq m\geq N$

S2.5.2(1552) Iterierter Limes
Vor: (a_{nm}) konvergent, $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a$,
● $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ a_n:=\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$
●● $\forall\ m\in\mathbb{N}\ \exists\ a_m:=\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$
Aussage: ● $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$
●● $\exists\ \lim\limits_{m\to\infty} a_m$: $a=\lim\limits_{m\to\infty} a_m$ bzw $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$

D2.5.3(1554) Gleichmäßige Konvergenz in n von $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon),\ N\neq f(n)$: $|a_{nm}-a_n|<\varepsilon\ \forall\ m\in\mathbb{N},\ m\geq N$
Andere Schreibweisen:
$a_n=\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}\ \forall\ n$ oder $a_{nm}\overset{m\to\infty}{\underset{glm}{\to}} a_n$

S2.5.3(1555)
● und ●● wie in S2.5.2, neu
Vor: $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$, $a_{nm}\in\mathbb{R}$, $\exists\ a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ● $\exists\ a_n=\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
●● $\exists\ a_m=\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}\ \forall\ m\in\mathbb{N}$
Aussage: ● $\exists\ \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$
●● $\exists\ \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$
(● und ●● ...$\exists\ \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}))$