

A0.2.1 Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X

- a) Zeige: $\forall x \in X$ ist die Menge $B(x) := \{y \in X \mid \text{es gilt nicht } y \sim x\}$ keine Äquivalenzklasse von \sim
- b) Zeige: Wenn \sim nur 2 Äquivalenzklassen hat so ist $B(x)$ eine Äquivalenzklasse
- c) Zeige: Wenn es ein $x \in X$ gibt, sodaß $B(x)$ eine Äquivalenzklasse ist, so hat \sim nur 2 Äquivalenzklassen.
- d) Zeige: Die Aussage, $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt auch nicht $x_1 \sim x_3$ ist falsch
- e) Zeige: Die Aussage, $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt jedenfalls $x_1 \sim x_3$ ist ebenfalls falsch.

A0.2.2 Definiere auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eine Relation R durch $(x_1, y_1) \stackrel{R}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$. Entscheide, ob es sich hierbei um eine ÄR handelt und bestimme ggf die ÄK.

Lös: $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$, z.z.: $\stackrel{R}{\sim}$ definiert eine ÄR

#Die „Rechenvorschrift ist eine Beziehung zwischen Paaren (u, v))#

Reflexivität :Es sei $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \Rightarrow xy = xy, (x, y) \stackrel{R}{\sim} (x, y)$

$(x_1, y_1) \stackrel{R}{\sim} (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_1 y_1$

Symmetrie :Es gelte $(x_1, y_1) \stackrel{R}{\sim} (x_2, y_2)$, d.h. $x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow (x_2, y_2) \stackrel{R}{\sim} (x_1, y_1) \# \Leftrightarrow x_2 y_1 = x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow$

Transitivität: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit

$(x_1, y_1) \stackrel{R}{\sim} (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \stackrel{R}{\sim} (x_3, y_3) \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow y_3 \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$ und $x_2 y_3 = x_3 y_2$.

Z.z : $x_1 y_3 = x_3 y_1$. Es gilt $x_1 y_3 = \frac{x_2 y_1}{y_2} y_3 = x_2 \frac{y_1 y_3}{y_2} = \frac{x_3 y_2}{y_3} \frac{y_1 y_3}{y_2} = x_3 y_1$

ÄK: $(x_0, y_0) \mid_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x_0 y = x y_0\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x/y = x_0/y_0\}$

A0.2.3

a) Es sei M eine beliebige Menge $\neq \emptyset$. Die Relation \sim auf $M \times M$ sei wie folgt definiert: $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) : \Leftrightarrow x_2 = y_2$

Zeige, dass \sim eine ÄR (auf M) ist und bestimme alle ÄK

Bew: \sim ist reflexiv: $x_2 = x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in M \times M$

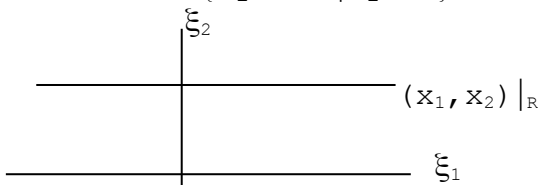
\sim ist symmetrisch: Sei $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow y_2 = x_2 \Rightarrow (y_1, y_2) \sim (x_1, x_2) \Rightarrow \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M$

\sim ist transitiv: Seien $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$

$$x_2 = y_2 \quad y_2 = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 \Rightarrow$$

$$(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2) \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in M \times M$$

$$\text{ÄK: } (x_1, x_2) |_{\sim} = \{ (y_1, y_2) \in M \times M \mid (y_1, y_2) \sim (x_1, x_2) \} = \{ (y_1, y_2) \in M \times M \mid y_2 = x_2 \} = \{ (y_1, x_2) \mid y_1 \in M \}$$



z.B. $M = \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) |_{\sim}$ ist hier Gerade durch $0, x_2$ parallel zur x_1 Achse.

Bem: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \bigcup_{x_2 \in \mathbb{R}} (x_1, x_2) |_{\sim}$ disjunkte Vereinigung

(Partition von \mathbb{R}^2 , vgl S0.2.1) $x_2 = y_2$ und $y_2 = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 \Rightarrow$

b) • Auf \mathbb{R} gilt

$x \sim y$ genau dann, wenn $xy \geq 0$,

Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?

Lös:

$x \sim y$ symmetrisch, da $xy = yx$; reflexiv, da $x \cdot x \geq 0$,

nicht transitiv, da $1 \sim 0$ wegen $1 \cdot 0 = 0$, $0 \sim -1$ wegen $0 \cdot (-1) = 0$ aber

$$1 \not\sim -1 \text{ wegen } 1 \cdot (-1) < 0$$

Keine Äquivalenzrelation

•• Auf \mathbb{R} gilt

$x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$.

Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?

Lös: $x \sim y$ reflexiv da $\forall x \in \mathbb{R}: x \sim x$ wegen $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$;

$x \sim y$ symmetrisch, da $z = x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -z = y - x \in \mathbb{Z}$;

$x \sim y$ transitiv, da $x \sim y \ \& \ y \sim z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \ \& \ y - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim z$

$x \sim y$ ist Äquivalenzrelation

$$\# 2 |_{\mathbb{R}} := \{ y \in \mathbb{R} \mid y \sim 2 \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid (2, y) \in \mathbb{Z} \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid (2 - y) \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}$$

$$\# \mathbb{Z} |_{\mathbb{R}} := \mathbb{Z}, \text{ Partition } P = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{ x \pm n \mid n \in \mathbb{N}_0 \} = \bigcup_{x \in [0,1)} \{ x \pm n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

A0.2.5 Es sei eine Funktion $f:A \rightarrow B$ gegeben. Die Mengen A_1, A_2 seien Teilmengen von A während B_1, B_2 Teilmengen von B seien.

Beweis: $B_1 \supset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Bew: " \Leftarrow " von \Leftarrow gilt zunächst nur \Rightarrow . Sei $x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$ baf \Leftarrow

$$f(x) \in B_1 \setminus B_2 \stackrel{\Leftrightarrow}{*_{B_2 \subset B_1}} f(x) \in B_1 \text{ und } f(x) \notin B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \text{ und } x \notin f^{-1}(B_2) \\ \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$$

" \supset " siehe oben Teil \Leftarrow von \Leftarrow

A0.2.6 Es seien X, Y Mengen $\neq \emptyset$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Zeige für $A \subset X, B \subset Y: f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

a) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Bew: $x \in f^{-1}(Y \setminus B) \stackrel{\text{Def 0.2.1.14}}{\Leftrightarrow} f(x) \in Y \setminus B \text{ und } x \in X \Leftrightarrow f(x) \notin B \text{ und } x \in X \text{ und } f(x) \in Y \\ \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \text{ und } x \in X \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(f(A)) \supset A$

// D0.2.3 3.) (105) $f: X \rightarrow Y: d) f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ Bild der Teilmenge $A \subset X$ //
 // unter $f. (= \{y \in Y \mid \exists x \in A: y = f(x)\})$, $(x, y) \in f.$ //
 // e) $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ //

Bew: Sei $x \in A$ beliebig $\stackrel{00.2.3.3.1}{\Rightarrow} f(x) \in \underbrace{f(A)}_B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(f(A))$

c) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Bew: Sei $y \in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\tilde{A}}) \stackrel{00.2.3.3.1}{\Rightarrow} \exists \underbrace{x \in \tilde{A}}_{\text{d.h. } y = f(x) \in B} = f^{-1}(B)$ mit $f(x) = y \Leftrightarrow y = f(x) \in B$

A0.2.7 Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion und $A, B \subset X$ und $C, D \subset Y$. Zeige:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ und finde ein Beispiel mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

A0.2.8 $X \neq \emptyset, A, B \subset X, f: X \rightarrow Y$ Abbildung

a) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

Bew: $y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \text{ \& } y \notin f(B)$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A: y = f(x) \text{ \& } \forall \tilde{x} \in B: y \neq f(\tilde{x}) \Rightarrow \exists x \in A \setminus B: y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A \setminus B) \Leftrightarrow f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$$

b) Bedingung für $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?

Lös: nach a) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$, gesucht Bedingung für $f(A) \setminus f(B) \supset f(A \setminus B)$

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A, y = f(A \setminus B) = f(x), \tilde{x} \in B, x \neq \tilde{x}$$

$$\text{Fall } y = f(x) = \underbrace{f(\tilde{x})}_{f \text{ surjektiv}} \in f(B) \Rightarrow y \notin f(A) \setminus f(B) \Rightarrow \cancel{f(A \setminus B)} \subset f(A) \setminus f(B)$$

$$\text{Fall } y = f(x) \neq \underbrace{f(\tilde{x})}_{f \text{ injektiv}} \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv} \Rightarrow f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$$