A1.4.1 Zeige für ein $f:D\to\mathbb{R}$ die Gleichungen $|f|=f^+ + f^-$, $f=f^+ - f^-$.

A1.4.2 Sei $D\subset\mathbb{R}$, und sei $-D=\{-x:x\in D\}$, sowie $A=D\cap(-D)$ (also möglicherweise die leere Menge). Sei $f:D\to\mathbb{R}$ so, dass $f(x)=f(-x)\ \forall\ x\in A$.
Zeige: Dann gibt es eine gerade Funktion $g:D\cup(-D)\to\mathbb{R}$, welche auf D mit f übereinstimmt (dieses g heißt gerade Fortsetzung von f). Wann gibt es genau eine ungerade Fortsetzung von f? Finde heraus, wann die gerade (ungerade) Fortsetzung von f gleich f ist.

A1.4.3 Zeige:Die Summe zweier gerader (ungerader) Funktionen ist wieder gerade(ungerade); das Produkt zweier gerader Funktionen aber auch zweier ungerader Funktionen ist gerade, das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion Funktion ist ungerade.

A1.4.4 Untersuche, ob folgende Funktionen gerade, ungerade, nach oben bzw nach unten beschränkt sind. Bestimme jeweils $|f|, f^+, f^-$.
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$
Lös:gerade: $f(-x)=(-x)^2-2=x^2-2=f(x)$ und $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$.
Nach oben unbeschränkt: $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \exists\ x\in\mathbb{R}$, $f(x)>K$?
Wähle $x=\sqrt{K+3}$. O.B.d.A. $K>0 \Rightarrow f(x)=K+3-2=K+1>K$
Nach unten beschränkt: $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-2\geq -2$

$$|f|(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2-2, x\leq -\sqrt{2}\ oder\ x\geq +\sqrt{2} \\ 2-x^2, sonst \end{cases}$$

$$f^+(x)=\begin{cases} x^2-2, x\leq -\sqrt{2}\text{ oder }x\geq\sqrt{2} \\ 0, \text{sonst} \end{cases},\quad f^-(x)=\begin{cases} 0, x\leq -\sqrt{2}\text{ oder }x\geq\sqrt{2} \\ 2-x^2, \text{sonst} \end{cases}$$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Lös:ungerade, unbeschränkt, $|f|(x):=\begin{cases} x^3-x, -1\leq x\leq 0\text{ oder }x\geq 1 \\ x-x^3, \text{sonst} \end{cases}$

A1.4.5 **Z**eige , daß f genau dann (streng) monoton wächst, wenn $-f$ (streng) monoton fällt.

A1.4.6 Zeige: Ist $f(x)>0$ für alle $x\in D$, so ist f genau dann (streng) monoton wachsend, wenn $1/f$ (streng) monoton fällt.

A1.4.7 Zeige, dass $\forall\ n\in N$ die Funktion $f(x)=x^{-n}$ auf dem Intervall $(0,\infty)$ streng monoton fällt

A1.4.8 Untersuche die Monotonie von $f(x)=x^m$, für eine beliebige Zahl m, auf dem Intervall $(-\infty,0)$ bzw auf $\mathbb{R}$.

Lös: 1. Fall: $m\in\mathbb{N}$, $f(x)=x^m$, $\uparrow$ auf $[0,\infty)$ d.h. $0\leq x<y \Rightarrow (*)\ x^m<y^m$.

Falls m gerade ($m=2k$, $k\in\mathbb{N}$):

$(x)^m=x^m$, dann gilt für $x<y\leq 0 \Rightarrow -x>-y\geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} (-x)^m>(-y)^m \Rightarrow$

$x^m>y^m$ also $f(x)=x^m$ $\downarrow$ auf $(-\infty,0]$ und $\uparrow$ auf $[0,\infty)$

Falls m ungerade ($m=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$):

$(-x)^m=-x^m$, $x<y\leq 0 \Rightarrow -x>-y\geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(*)} (-x)^m>(-y)^m \Rightarrow -x^m>-y^m \Rightarrow$

$x^m<y^m$, $f(x)=x^m$, $\uparrow$ auf $(-\infty,0)$, also, auf $\mathbb{R}$.

2. Fall: $m=0$, $f(x)=x^m=1$, konst Funktion $\searrow$ <u>und</u> $\nearrow$, nicht streng monoton

3. Fall: $m<0$, $f(x)=x^m=(1/x)^n$, $n=-m\in\mathbb{N}$.

$f(x)$ für $x=0$ nicht definiert, nur für $(-\infty,0)$.

Sei $x<y<0 \Rightarrow 0>1/x>1/y \underbrace{\Rightarrow}_{1.\text{Fall}} (1/x)^n<(1/y)^n$ falls n gerade,

$(1/x)^n>(1/y)^n$ falls n ungerade $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x^m < y^m \text{ falls m gerade} (m = 2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0) \\ x^m > y^m \text{ falls m ungerade} \end{cases}$$

$f(x)=x^m$, $m<0$ auf $(-\infty,0)$ $\uparrow$ falls m gerade,

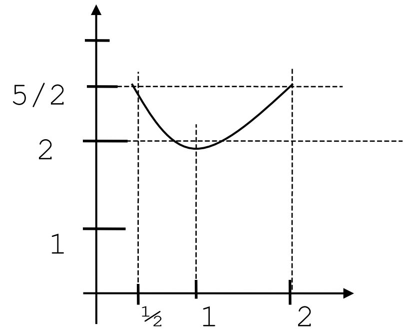
$\downarrow$ falls m ungerade

//S1.3.1 (501) Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//

// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//

// $\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ infT$\in$K und infT$\in$T: minT=infT//

A1.4.9 $M=\left\{x+\frac{1}{x}: x\in\mathbb{R}, 1/2<x\leq 2\right\}$ 3



Max,sup,min inf?

Beh:min M=inf M $\underset{S1.3.1}{=}$ 2, sup M=max M=5/2

Bew:M=[2,5/2]={y∈ℝ:2≤y≤5/2}.

Hieraus sofort die Beh, denn
min M=2 (folgt aus Def von min,
da 2≤y ∀ y∈M und 2∈M.
max M=5/2(folgt aus Def von max, da y≤5/2 ∀ y∈M und 5/2∈M) $\underset{S1.3.1\ 2)}{\Rightarrow}$
inf M=2, sup M=5/2.

- Bew zu M=[2,5/2], Betrachte f(x)=x+1/x, x>0.
Genügt Zu zeigen f((1/2, 2])=[2,5/2]….Methode: "⊂„ und „⊃„

- Zu"⊂„
Wir zeigen(.)f(x_1)<f(x_2) ∀ x_1,x_2∈[1,∞] mit x_1<x_2
(f ist streng monoton wachsend auf [1,+ ∞))
(..)f(x_1)>f(x_2) ∀ x_1,x_2∈(1/2, 1] mit x_1<x_2
(f ist streng monoton fallend auf (1/2,1])
Aus (.),(..) folgt
f((1/2,2])⊄[2, 5/2], denn sei
x∈(1/2,2] bel. ⇒ x∈(1/2, 1] oder x∈[1,2].

1.Fall:x∈(1/2,1]: 2=f(1) $\underset{(..)}{\leq}$ f(x) $\underset{(..)}{<}$ f(1/2)=5/2

2.Fall:x∈[1,2]: 2=f(1) $\underset{(.)}{\leq}$ f(x) $\underset{(.)}{\leq}$ f(2)=5/2 ⇒ f(x)∈[2, 5/2],

Bew zu (.)f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1+1/x_2-1/x_1=$\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)}_{>1-\frac{1}{x_1^2}\geq 1-\frac{1}{1}=0}>0$

Bew zu(..)f(x_2)-f(x_1)=$\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)}_{>0}<0$, denn $1-\frac{1}{x_1x_2}<1-\frac{1}{x_2^2}\leq 0$

- - Zu „⊃„
*f(x)=y ⇔ y=x+$\frac{1}{x}$ ⇔ x^2+1=xy ⇔ x^2-xy+1=0 ⇔ x=x_1 oder x=x_2 mit
$x_{1,2}$=1/2(y±$\sqrt{y^2-4}$). Sei y∈[2, 5/2].
¿ Def x:=1/2(y+$\sqrt{y^2-4}$) ⇒ x∈ℝ und f(x)=y (siehe*)
Noch z.z x∈(1/2, 2]. x≥ $\frac{1}{2}$ y≥1/2 ¿ 2=1.
Annahme: x>2 $\underset{(.)s.o.}{\Rightarrow}$ y=f(x) $\underset{(.)}{¿}$ f(2)=5/2 Widerspruch also x≤2 ⇒
x∈(1/2, 2].
¿ Def x:=1/2(y-$\sqrt{y^2-4}$) ⇒ x∈ℝ und *f(x)=y
y=2 ⇒ x=1/2(2-$\sqrt{4-4}$)=1, y=5/2 ⇒ x=1/2(5/2-$\sqrt{(5/2)^2-4}$)=1/2
(..)∀ 1/2≤x≤1:5/2≤y≤2 sonst ~~(..)~~ ,ausführlicher Beweis zunächst verschoben, da wohl nicht weiter schwer.???

A1.4.10 [0,1]→[0,1], Surjektiv oder injektiv?

a) $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig

Lös: Seien $x,y \in [0,1]$, $y>x$ (d.h. $y>0$) ⇒

$$y>x \underset{y>0}{\Rightarrow} y^2>yx \underset{y>x}{\Rightarrow} y^2>x^2 \underset{y>0}{\Rightarrow} y^3>yx^2 \underset{y>x}{\Rightarrow} y^3>x^3 \text{..usw} \underset{Induktion}{\Rightarrow} y^k>x^k \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$