

A1.5.1 Sei im folgenden $a \in \mathbb{R}$ festgehalten. Wir wollen ein $M \subset \mathbb{R}$ a -induktiv nennen, wenn $a \in M$ und $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$ immer gelten. Zeige: Es gibt genau eine kleinste a -induktive Menge N_a . Für welches a ist $N_a = \mathbb{N}$?

A1.5.2 Zeige für N_a wie oben 2 Aussagen, welche obiger Beh entsprechen

A1.5.3 Finde für jedes N_a wie oben eine bijektive Abb von N_a auf \mathbb{N}

A1.5.4 Zeige: $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lös: Für $n=1$ ist die Aussage sicher richtig.

Wenn sie für irgend ein n gilt, folgt

$$1+3+\dots+(2n+1)+(2n+3) = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1^2 = (n+1+1)^2.$$

Also gilt die Beh auch für $n+1$ anstelle von n

A1.5.5 Beweise durch vollständige Induktion:

a) Beweis $n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 3$.

Bew: $n=1$: $1^2 \leq 2^1 = 2$ ok

$n=2$: $2^2 \leq 2^2$ ok

IA $n=4$: $4^2 \leq 2^4$ ok

IH $n^2 \leq 2^n$

$$\text{IS} \quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \stackrel{\text{IH}}{\leq} 2^n + \frac{n^2}{2} + 1 \leq 2^n + 2^{n-1} + 1 \leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(Bedeutung $\sum_{k=1}^{n+1}$ siehe D1.5.2 (709))

$$\text{Bew: IAnf } n=1 \quad : 1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1$$

$$\text{IHyp für ein } n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\text{IS } n \rightarrow n+1 \quad : \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

b) Sei M eine endliche Menge, $|M|$ bezeichne die Anzahl ihrer Elemente und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. \forall endlichen Mengen gilt: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Anl: Für $m \in M$ ist $\mathcal{P}(M) = \mathcal{A} \cup (\mathcal{P}(M) \setminus \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{P}(M) : m \in X\}$

Bew: IAnf $n=1$: $|M|=1 \Rightarrow M = \{m\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{m\}\} \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2 = 2^1$.

Ihyp : $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ für ein $n \in \mathbb{N} \dots$

IS $n \rightarrow n+1$: Sei $m \in M$. $\tilde{M} = M \setminus \{m\} \Rightarrow |\tilde{M}| = n$, da $|M| = n+1$.

$$X = \{ \underbrace{X \text{ ohne } \{m\}}_Y \cup \{m\} \}$$

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{A} \cup (\mathcal{P}(M) \setminus \mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{P}(M) : m \in X\} \cup \{X \in \mathcal{P}(M) : m \notin X\} =$$

$$\{X \in \mathcal{P}(M) : m \in X\} \cup \{Y \in \mathcal{P}(\tilde{M})\} = \{Y \cup \{m\} : Y \in \mathcal{P}(\tilde{M})\} \cup \{Y \in \mathcal{P}(\tilde{M})\}$$

$$|\mathcal{P}(M)| = |\{Y \cup \{m\} : Y \in \mathcal{P}(\tilde{M})\}| + |\mathcal{P}(\tilde{M})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

c) Fibonaccizahlen: Es seien $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gegeben. F_n wird rekursiv definiert durch $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Dann gilt $\forall 2 \leq n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{[1 / 2(1 + \sqrt{5})]^n - [1 / 2(1 - \sqrt{5})]^n}{1 / 2(1 + \sqrt{5}) - 1 / 2(1 - \sqrt{5})} = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}, \quad \lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad \mu = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

Bew: IAnfang $n=2$: $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$$F_2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} = \lambda + \mu = 1/2(1 + \sqrt{5}) + 1/2(1 - \sqrt{5})$$

IHyp : Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $F_k = \frac{\lambda^k - \mu^k}{\lambda - \mu} \quad \forall 2 \leq k \leq n$

IS $n \rightarrow n+1$: z.z. $F_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda - \mu} \stackrel{IHyp \text{ f. } n \text{ und } n-1}{=} F_n + F_{n-1} = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} + \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu} =$

$$\frac{(\lambda^n + \lambda^{n-1}) - (\mu^n + \mu^{n-1})}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda^{n-1}(\lambda + 1) - \mu^{n-1}(\lambda + 1)}{\lambda - \mu} \quad \text{siehe NR}$$

NR: $\lambda^n + \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + 1) = \lambda^{n-1} \lambda^2 = \lambda^{n+1}$.

Beh: $(\lambda + 1) = \lambda^2$ ←

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $[1/2(1 + \sqrt{5})]^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
 analog $\mu^n + \mu^{n-1} = \mu^{n+1}$.

d) $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lös: $n=0$: $\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1$, $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1 \dots \text{ok}$

Indh: $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ für $n \geq 0$

$n \rightarrow n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k + 2^{n+1} \stackrel{IH}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$

e) $\prod_{k=2}^n (1-k) = (-1)$

A1.5.6

a) Durch das Rekursionsschema

$a_0 := -2, a_1 := 1, a_{n+1} := 1/2(a_n + a_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, wird genau eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ festgelegt. Man gebe eine explizite Darstellung für diese Folge.
Anleitung: Man berechne a_n für $n=2,3,4,5$ und beweise sodann die sich ergebende Vermutung.

//S1.5.3 (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//
//Vor: Aus „ $A_{(m)}$ ist wahr“ $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ folgt stets „ $A_{(n+1)}$ ist wahr“, // //
so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ //

Lös: $a_2 = 1/2(1 + (-2)) = -1/2, a_3 = 1/4, a_4 = -1/8, a_5 = 1/16$.. Vermutung:

Beh: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = (-1/2)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}_0$. Bew mit Indsatz 2. Fassung

$$A(n) : a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew: IAnf S1.5.3: $n=0: a_0 = -2 = (-1/2)^{0-1}$, d.h. $A_{(0)}$ wahr

IS : $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(A_{(m)} \forall m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 0 \leq m \leq n \Rightarrow A_{(n+1)})$.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest aber beliebig

(Z.z. ist: $\underbrace{A_{(m)}, 0 \leq m \leq n}_{\text{Ind Hyp}} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Ind Beh}}$)

1. Fall: $n=0, a_{n+1} = a_1 = 1 = (-1/2)^0 = (-1/2)^{(n+1)-1} = (-1/2)^{(1+1)-1} = (-1/2)$ wahr,

d.h. $A_{(0)} \Rightarrow A_{(0+1)}$, $A_{(0)}$ wurde hier nicht benötigt

2. Fall: $n \geq 1$ IndHyp: $a_m = (-1/2)^{m-1}$ für alle $m, 0 \leq m \leq n$,

IndBeh : $a_{n+1} = (-1/2)^{(n+1)-1} = (-1/2)^n$

$$a_{n+1} = 1/2(a_n + a_{n-1}) \stackrel{\text{IndHyp}}{=} 1/2((-1/2)^{n-1} + (-1/2)^{(n-1)-1}) =$$

$$\frac{1}{2}((-1/2)^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1 + (-1/2)^{-1}}{= 1 + (-2)^{-1}} \right)}_{= 1 + (-2)^{-1}}) =$$

$$(-1)(1/2)(-1/2)^{n-1} = (-1/2)(-1/2)^{n-1} = (-1/2)^n$$

//S1.5.3 (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//
//Vor: Aus „ $A_{(m)}$ ist wahr“ $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ folgt stets „ $A_{(n+1)}$ ist wahr“//
// so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ //

Es wurde also für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt

$A_{(m)}, \forall m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 0 \leq m \leq n \Rightarrow A_{(n+1)}$,

also nach Teil 2) in S1.5.3 $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(A_{(m)}, m \in \mathbb{N}_0, 0 \leq m \leq n \Rightarrow A_{(n+1)})$.

Die Vor nach S1.5.3 ist also erfüllt mit IndAnf $n=0$.

Damit: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}_0$ (Teil 1 und 2))

b) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert:

$$a_0 := 3, a_{n+1} := 1/2(a_n + 5/a_n), n \geq 0.$$

(.) Zeige: $\sqrt{5} < a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}_0$.

(..) Ist $\sqrt{5}$ das Infimum der Wertemenge der Folge (a_n) ?

Bem: Diese Def ist sinnvoll, da $a_n > 0$ d.h. auch $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Bew durch Induktion

$$n=0: a_0 = 3 > 0, n \rightarrow n+1: a_{n+1} = 1/2 \left(\underbrace{a_n}_{>0} + \underbrace{5/a_n}_{>0} \right) > 0$$

// A1.2.10c) 408) $a, b \in \mathbb{K}$ angeordnet. c) $a^2 < b^2$ gilt genau dann, wenn $|a| < |b|$ //

// S1.3.1 (501) Vorl.: \mathbb{K} angeordnet $T \subset \mathbb{K}, T \neq \emptyset, s \in \mathbb{K}$ //

// 1.) $\underline{s} = \inf T: \Leftrightarrow \alpha) \underline{s}$ ist untere Schranke von T und //

// $\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\underline{s} + \varepsilon$ keine untere Schranke von T //

// $\Leftrightarrow \forall t \in T: t \geq \underline{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon < \underline{s} + \varepsilon$ //

Lös: z.z. $\sqrt{5} < a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$5 < a_n^2 \text{ (damit } \sqrt{5} < a_n \text{, denn } (\sqrt{5})^2 = 5 < a_n^2 \Leftrightarrow \underbrace{|\sqrt{5}|}_{=\sqrt{5}, \sqrt{\cdot} \text{ stets } \geq 0} < |a_n| = a_n > 0)$$

$$\text{und } a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Bew $5 < a_n^2$ (IHyp) durch Induktion nach n .

Ianf $n=0: 5 < a_0^2 = 3^2 = 9$ und

$$a_1 = 1/2(a_0 + 5/a_0) = 1/2(3 + 5/3) = 7/3 < 9/3 = 3 = a_0$$

$$\text{IS } n \xrightarrow{n \geq 0} n+1: a_{n+1}^2 - 5 = [1/2(a_n + 5/a_n)]^2 - 5 = 1/4(a_n^2 + 10 + (5/a_n)^2 - 20) =$$

$$1/4(a_n^2 - 10 + (5/a_n)^2) = [1/2(a_n - 5/a_n)]^2 = \left(\frac{a_n^2 - 5}{2a_n} \right)^2 > 0,$$

$$\text{(da nach IHyp } a_n^2 - 5 \neq 0 \text{ wegen } a_n^2 > 5) \Rightarrow a_{n+1}^2 > 5$$

Beh: $a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Bew: } a_n - a_{n+1} = a_n - 1/2(a_n + 5/a_n) = 1/2(a_n - 5/a_n) = \frac{a_n^2 - 5}{2a_n} > 0$$

(nach IHyp da $a_n^2 - 5 \neq 0$ wegen IHyp $a_n^2 > 5$) also $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0$

Nach obigem ist die Menge $\{a_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ nach unten durch

$$\sqrt{5} \text{ beschränkt } \xrightarrow{\text{Vollständigkeitsax.}} \exists \alpha := \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}$$

existent in \mathbb{R} und $\alpha \geq \sqrt{5}$

Beh: $\alpha = \sqrt{5} = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\}$

$$\text{Bew: Annahme: } \alpha \neq \sqrt{5}, \text{ d.h. } \alpha > \sqrt{5} \xrightarrow{\text{A1.2.10c}} \alpha^2 > 5 \Rightarrow a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 5}{2a_n} \underset{a_n \geq \alpha}{\geq} \frac{\alpha^2 - 5}{2 \cdot 3} \forall n$$

$$\frac{\alpha^2 - 5}{2 \cdot 3} =: \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}_0, \text{ wobei } \varepsilon > 0 \text{ (da } \alpha^2 > 5).$$

$$a_n \leq a_0 = 3 \forall n$$

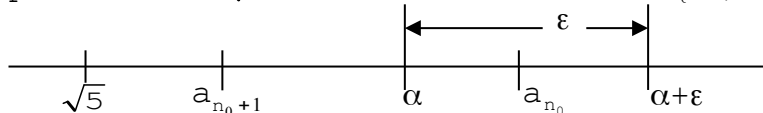
$$* a_{n_0} - a_{n_0+1} \geq \varepsilon \Rightarrow -a_{n_0+1} \geq \varepsilon - a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0+1} \leq a_{n_0} - \varepsilon$$

Zu diesem $\varepsilon > 0$ $\exists t_\varepsilon \in \{a_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ da α Infimum, mit $t_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$, (S1.3.11.)

$$\text{d.h. } \exists n_0 \in \mathbb{N}_0: a_{n_0} < \alpha + \varepsilon, \text{ d.h. } a_{n_0} - \varepsilon < \alpha \Rightarrow a_{n_0+1} \leq a_{n_0} - \varepsilon < \alpha \Rightarrow$$

$$\sqrt{5} < a_{n_0+1} < \alpha..$$

Widerspruch zu $\alpha > \sqrt{5}$ untere Schranke von $\{a_n, n \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow \alpha = \sqrt{5}$



A1.5.7

a) $a_n := \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$. Zeige $a_n \geq \frac{1}{2}$.

Lös: $a_{n+1} < a_n$, $\frac{1}{2} < a_n < 1 \quad \forall n \geq 2$,

$$a_n - a_{n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

Für $n \geq 2$: $a_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} < \frac{n}{n} = 1$

(man braucht 2 Summanden, daher $n \geq 2$, größter Summand ist $\frac{1}{n}$)

für $n=1$: $a_n = 1 < 1$, $a_n - \frac{1}{2} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \underset{n \geq 2}{>} \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2n - (2n-1)}{4n-2} = \frac{1}{4n-2} > 0$
gilt auch für $n=1$, dann $> \rightarrow \geq$

b) Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3)

// **S1.5.3** (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//
 //Vor: Aus „ $A_{(m)}$ ist wahr“ $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ folgt stets „ $A_{(n+1)}$ ist// //wahr“,
 so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ //
 //Bem: Induktion kann auch bei $n_0 \in \mathbb{N}$ beginnen $B_{(n)} := A_{(n_0+n-1)}$ //

Beweise: $\sum_{v=1}^n v = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

// D1.5.2 (709) //

// (.) Die Summe $\sum_{v=1}^n a_v$ durch $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=1}^0 a_v := 0 \\ \sum_{v=1}^1 a_v := a_1 \\ \sum_{v=1}^{m+1} a_v := a_{m+1} + \sum_{v=1}^m a_v, 1 \leq m \leq n-1 \end{array} \right. //$

// **S1.5.1** (701) vollständigen Ind//
 //Vor. $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es
 // gelte 1.) „ $A_{(1)}$ ist wahr“ (Induktionsanfang) und//
 // 2.) $\forall n \in \mathbb{N}$ (beliebige $n \in \mathbb{N}$) folgt aus „ $\underbrace{A_{(n)} \text{ ist wahr}}_{\text{IndHyp}}$ “ auch//

// „ $\underbrace{A_{(n+1)} \text{ ist wahr}}_{\text{IndAussage}}$ “ so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ //

// $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{\left(\underbrace{A_{(n)}}_{\text{Induktionshypothese}} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Induktionsbehauptung}} \right)}_{\text{Induktionsschluß } n \Rightarrow n+1}$ ist wahr //

// Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ //

Bew: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Induktion kann bei jedem Element von

\mathbb{Z} anfangen (mit $A(n) := \sum_{v=1}^n v = \frac{n(n+1)}{2}$)

IANf $n=0$: $\sum_{v=1}^0 v \stackrel{\text{D1.5.2}}{=} 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ wahr, d.h. $A_{(0)}$ wahr

IS $n \rightarrow n+1$ ($n \geq 0$) : z.z. $\underbrace{\sum_{v=1}^n v = \frac{n(n+1)}{2}}_{A_{(n)} \text{ Indhyp}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{v=1}^{n+1} v = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}}_{A_{(n+1)} \text{ Indbeh}}$ ist wahr

$$\sum_{v=1}^{n+1} v \stackrel{\text{D1.5.2}}{=} (n+1) + \underbrace{\sum_{v=1}^n v}_{\text{Ind Hyp} = \frac{n(n+1)}{2}} = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1) \left(1 + \frac{n}{2}\right) =$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ damit ergibt sich die Beh aus S1.5.1}$$

(vollständige Induktion) mit Induktionsanfang $n=0$ anstelle von $n=1$

$$c) \sum_{v=1}^n v^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Bew: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$

$$n=0 \quad : \sum_{v=1}^0 v^2 \stackrel{D1.5.2}{=} 0 = \frac{0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} \quad \text{wahr}$$

$$\begin{aligned} \overset{n}{\underset{n>0}{\downarrow}} n \mapsto n+1 &: \sum_{v=1}^{n+1} v^2 \stackrel{D1.5.2}{=} (n+1)^2 + \sum_{v=1}^n v^2 \stackrel{IHyp}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ & (n+1) \frac{6(n+1) + n(2n+1)}{6} = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = \\ & \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

$$d) \prod_{k=1}^n (1+1/k) = n+1$$

$$\text{Bew: IHyp} : \prod_{k=1}^n (1+1/k) = n+1$$

$$n=1 \quad : \prod_{k=1}^1 (1+1/k) = 1+1$$

$n \mapsto n+1$: Es gelte $\prod_{k=1}^n (1+1/k) = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1+1/k) = \prod_{k=1}^n (1+1/k) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \stackrel{IHyp}{=} (n+1) \frac{n+2}{n+1} = n+2 = (n+1)+1$$

$$e) \prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{für } x_1, \dots, x_n > 0.$$

Wenn $x_1, \dots, x_n = x$: $(1+x)^n \geq 1+nx$, siehe auch weiter unten S1.5.6 mit $x \geq -1$

$$\text{Bew: } n=1 \quad : \prod_{k=1}^1 (1+x_k) = 1+x_1 = 1 + \sum_{k=1}^1 x_k$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 &: \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) = \prod_{k=1}^n (1+x_k) (1+x_{n+1}) \geq \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k\right) (1+x_{n+1}) = \\ & 1 + \sum_{k=1}^n x_k + \underbrace{\sum_{k=1}^n x_k}_{\geq 0} x_{n+1} + \underbrace{x_{n+1}}_{>0} \sum_{k=1}^n x_k \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k. \end{aligned}$$

$$f) \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \geq n^2 \quad (a_1, \dots, a_n > 0)$$

$$\text{Bew: Für } x, y > 0 \text{ gilt } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2 + 2xy}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} = 2$$

Bew durch Induktion nach n

$$n=1: \sum_{k=1}^1 a_k \cdot \sum_{j=1}^1 \frac{1}{a_j} = \frac{a_1}{a_1} = 1^2$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 &: \text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ gelte } \sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{a_j} = \left(\sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \\ & \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} + a_{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \frac{1}{a_{n+1}} > \\ & n^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_{n+1}}{a_j} + \frac{a_j}{a_{n+1}}\right) + 1 \geq n^2 + \sum_{j=1}^n n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

$$g) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{Bew: } n=1: \sum_{k=1}^n k^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2$$

$$n \rightarrow n+1: \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + \frac{4n+4}{4} \right) = (n+1)^2 + \frac{(n+2)^2}{4} =$$

$$\mathbf{A1.5.8} \text{ Beweise: } \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^j a_{jk} = \prod_{k=1}^n \prod_{j=k}^n a_{jk}$$

Bew: 1. Möglichkeit:

$$K =: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$$

$$j=1: a_{11}$$

$$j=2: a_{21} \quad a_{22}$$

$$j=3: a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$$

.

.

$$j=n: a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3} \dots a_{nn}$$

$$\prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^j a_{jk} = \prod_{j=1}^n a_{j1} a_{j2} a_{j3} \dots a_{jj} = (a_{11}) (a_{21} a_{22}) \dots (a_{n1} \dots a_{nn}) =$$

$$\left(\prod_{j=k}^n a_{1k} a_{2k} \dots a_{nk} \right) = \prod_{k=1}^n a_{k1} a_{k+1k} \dots a_{nk} = \prod_{k=1}^n \prod_{j=k}^n a_{jk}$$

2. Möglichkeit:

$$\prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^j a_{jk} = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n \underbrace{a_{jk}}_{\substack{\text{Setze } a_{jk}=1 \\ \text{für } k > j}} = \prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^n a_{jk} = \prod_{k=1}^n \prod_{j=k}^n a_{jk}. \quad 1 \leq k \leq j \leq n$$

A1.5.9 Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_v \geq 0 \quad \forall v=1, \dots, n$.

$$\text{Beweis: } \prod_{v=1}^n (1+x_v) \geq 1 + \sum_{v=1}^n x_v.$$

$$\text{Bew: } \prod_{v=1}^n (1+x_v) \underbrace{\left(1 + \underbrace{x_{n+1}}_{\geq 0} \right)}_{\geq 0} \geq \left(1 + \sum_{v=1}^n x_v \right) (1+x_{n+1}) = 1 + \sum_{v=1}^{n+1} x_v + \underbrace{x_{n+1} \sum_{v=1}^n x_v}_{\geq 0} \geq 1 + \sum_{v=1}^{n+1} x_v$$

Durch vollständige Induktion:

$$n=1: \prod_{v=1}^1 (1+x_v) = 1+x_1 \geq 1 + \sum_{v=1}^1 x_v = 1+x_1$$

$$n \rightarrow n+1: \prod_{v=1}^{n+1} (1+x_v) = (1+x_{n+1}) \prod_{v=1}^n (1+x_v) \geq (1+x_{n+1}) \left(1 + \prod_{v=1}^n (1+x_v) \right) =$$

$$1 + \sum_{v=1}^n x_v + x_{n+1} + \underbrace{x_{n+1} \sum_{v=1}^n x_v}_{\geq 0} \geq 1 + \sum_{v=1}^n x_v + x_{n+1} = 1 + \sum_{v=1}^{n+1} x_v \Rightarrow$$

$A(n)$ ist wahr

A1.5.10 Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{C}$, und es sei $A_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zeige: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k)$

Bew: Induktion nach n oder $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^k a_v (b_{k+1} - b_k) =$

$$\sum_{v=1}^n a_v \underbrace{\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k)}_{\text{Teleskopsumme}} = \sum_{v=1}^n a_v (b_{n+1} - b_v) = b_{n+1} A_n - \sum_{v=1}^n a_v b_v.$$

oder rechte Seite:

$$\begin{aligned} A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k) &= b_{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} a_v - \underbrace{\sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) \sum_{v=1}^k a_v}_{1 \leq v \leq k \leq n} = \\ b_{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} a_v - \sum_{v=1}^n a_v \sum_{k=0}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) &= \sum_{v=1}^n a_v (b_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (b_{k+1} - b_k)) = \\ \sum_{v=1}^n a_v (b_{n+1} + b_v - b_{n+1}) &= \sum_{v=1}^n a_v b_v : \text{linke Seite} \end{aligned}$$

A1.5.11 Beweise $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichung $1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n^2 - 1})^n$.

Bew: $(1 + \frac{1}{n^2 - 1})^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}, \quad \frac{n^2}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}$

A1.5.12

Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3). Beweise:

a) $n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\}$

// **A1.2.9** (408) a) aus $a < b$ und $b \leq c$ folgt $a < c$ //

Bew: $n=0, 0^2=0 \leq 1=2^0, n=1: 1^2=1 \leq 2=2^1, n=2: 2^2 \leq 2^2, n=3: 3^2 \not\leq 2^3$

$n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ wird unten durch Induktion nach n noch bewiesen. Dazu benötigt man Lemma:

$2n+1 < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ Induktion nach n

$n=3: 2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$ wahr

$$\stackrel{n}{\underset{n \geq 3}{\uparrow}} \mapsto n+1: 2(n+1)+1 = (2n+1)+2 \stackrel{\text{IndHyp}}{\leq} 2^n + \frac{2}{2^n} < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Also: $2(n+1)+1 < 2^{n+1}$ (mit **A1.2.9** a)

Bem: $2 \leq 2^n = (1+1)^n \stackrel{\text{Bernoulli Ungl}}{\geq} 1+n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Noch z.z.: $n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \dots$ Induktion nach n

$n=4: 4^2 = 16 \leq 16 = 2^4$ wahr

$$\stackrel{n}{\underset{n \geq 4}{\uparrow}} \mapsto n+1: (n+1)^2 = \frac{n^2}{2} + 2n+1 \stackrel{\text{IndHyp}}{\leq} \frac{2^n}{2} + \frac{2n+1}{2} \stackrel{\text{Abschätzung}}{\leq} 2^{n-1} + \frac{2n+1}{2} \stackrel{\leq 2^n \text{ siehe oben da } n \geq 3}{\leq} 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$$

Bem: Genauer gilt $n^2 < 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, n \geq 5$ oder $n \in \{0, 1\}$

$n^2 = 2^n$ für $n \in \{2, 4\}$

$n^2 > 2^n$ für $n=3$

b) $\sum_{v=1}^{2n} \frac{(-1)^{v+1}}{v} = \sum_{v=n+1}^{2n} \frac{1}{v} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

$$//D1.5.2 \quad (709) \quad \sum_{v=1}^n a_v := \begin{cases} \sum_{v=1}^0 a_v := 0 \\ \sum_{v=1}^1 a_v := a_1 \\ \sum_{v=1}^{m+1} a_v := a_{m+1} + \sum_{v=1}^m a_v, 1 \leq m \leq n-1 \end{cases} //$$

Bew: Induktion nach n

$$n=0: \quad \sum_{v=1}^{2 \cdot 0} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \stackrel{D1.5.2}{=} 0 \stackrel{D1.5.2}{=} \sum_{v=1}^0 \frac{1}{v} = \sum_{v=0+1}^{2 \cdot 0} \frac{1}{v} \text{ wahr}$$

$$n \mapsto n+1: \quad \sum_{v=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \stackrel{2 \times D1.5.2}{=} \sum_{v=1}^{2n} \frac{(-1)^{v+1}}{v} + \frac{(-1)^{\overbrace{(2n+1)+1}^{\text{gerade}}}}{2n+1} + \frac{(-1)^{\overbrace{(2n+2)+1}^{\text{ungerade}}}}{2n+2} \stackrel{IndHyp^*(715)}{=}$$

$$\left(\sum_{v=n+1}^{2n} \frac{1}{v} \right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{-1}{2n+2} = \left(\sum_{v=n+2}^{2n+1} \frac{1}{v} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \sum_{v=n+1}^{2n+1} \frac{1}{v} \quad \leftarrow \begin{matrix} 2n+1-2 \\ 2n+1-2 \end{matrix} \quad \left(\sum_{v=n+2}^{2n+1} \frac{1}{v} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\sum_{v=n+2}^{2n+2} 1/v = \sum_{v=(n+1)+1}^{2(n+1)} 1/v$$

$$* \quad (-1)^k = \begin{cases} 1, \text{ falls } k \text{ gerade} \\ -1, \text{ falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{Bew. durch Ind nach } k)$$

$$\left(\sum_{v=n+1}^{2n} 1/v + \frac{1}{2n+1} \right) = \sum_{v=n+1}^{2n+1} 1/v$$

A1.5.13 $M = \left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$M = \{1/2; 1; 9/8; 1; 0,78125; 0,5625, \dots\}$Vermutung:
 Beh: $\inf M = 0$, $\min M$ existiert nicht, $\sup M = \max M = 9/8$

// **A1.5.12** (715) a) $n^2 \leq 2^n \forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\}$

// **S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K, T \neq \emptyset, s \in K$

// 1.) $\bar{s} = \sup T: \Leftrightarrow \alpha) \bar{s}$ ist obere Schranke von T und

// $\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\bar{s} - \varepsilon$ keine obere Schranke von T

// $\Leftrightarrow \forall t \in T: t \leq \bar{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \bar{s} - \varepsilon$

// $\underline{s} = \inf T: \Leftrightarrow \alpha) \underline{s}$ ist untere Schranke von T und //

// $\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\underline{s} + \varepsilon$ keine untere Schranke von $T //$

// $\Leftrightarrow \forall t \in T: t \geq \underline{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon < \underline{s} + \varepsilon //$

// 2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in K$ und $\sup T \in T: \max T = \sup T //$

// $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in K$ und $\inf T \in T: \min T = \inf T //$

Bew: (.) $\frac{n^2}{2^n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ nach A1.5.12 a), für $n=3: \frac{n^2}{2^n} = 9/8 \stackrel{1 \leq 9/8}{\Rightarrow}$

$$\frac{n^2}{2^n} \leq 9/8 \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } 9/8 \in M \stackrel{\text{Def max}}{\Rightarrow} \max M = 9/8 \stackrel{\text{S1.3.1 2.)}}{\Rightarrow} \sup M = 9/8.$$

(..) $\frac{n^2}{2^n} > 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ ist untere Schranke von M

Noch z.z.* $\forall \varepsilon > 0 \exists m^\varepsilon \in M$ mit $m^\varepsilon < \varepsilon$. Dann folgt aus S1.3.1 1.)

$\inf M = 0 \stackrel{\text{S1.3.1 2.)}}{\Rightarrow} \min M$ existiert nicht
 $0 \notin M$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ bel aber fest.

\mathbb{N} unbeschränkt $\Rightarrow \exists \underbrace{n_0}_{\in n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N}: n_0 > 1/\varepsilon$ bzw. $1/n_0 < \varepsilon$.

O.B.d.A. $n_0 \geq 10$

Setze $m^\varepsilon = \frac{n_0^2}{2^{n_0}} \Rightarrow m^\varepsilon \in M$ und $m^\varepsilon \stackrel{2^{n_0} > n_0^3}{<} \frac{n_0^2}{n_0^3} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Einschub: Beh $2^n > n^3 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Bew Induktion nach n

$n=10: 2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$

$$n \xrightarrow{n \geq 10} n+1: (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \stackrel{\text{IndHyp}}{\leq} 2^{n+1} + \underbrace{(3n^2 + 3n + 1)}_{< 2^n, \text{ da } n \geq 10} < 2^{n+1} + 2^n = 2^{n+1}$$

Nebenrechnung $3n^2 + 3n + 1 < 2^n \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10$

(stimmt auch für $n=8$ und $n=9$) Bew durch Induktion nach n

$n=10: 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 331 < 1024 = 2^{10}$

$n \mapsto n+1: 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = (3n^2 + 6n + 3) + (3n + 3) + 1 =$

$$(3n^2 + 3n + 1) + (6n + 6) \stackrel{\text{IndHyp}}{\leq} 2^n + \underbrace{6(n+1)}_{< 2^n \text{ (Induktion)}} < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Beh: $6(n+1) < 2^n \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10$

$n=10: 66 < 1000$

$n \mapsto n+1: 6(n+2) = 6(n+1) + 6 \stackrel{\text{IndHyp}}{\leq} 2^n + \underbrace{6}_{< 2^n} < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$