A1.9.9 (Minkowski-Ungleichung) Zeige, dass für $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}$$

Bew:Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\le\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k||a_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k||b_k|\underset{\text{CauchySchwarz}}{\leq}$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^2}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^2\sqrt{\left|a_k+b_k\right|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k+b_k\right|^2}}=$$

$\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\le\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2}+\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2}$ Beh, wenn

$\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}>0$ (Bei =0 Beh offensichtlich)

A1.9.10 Seien x_k und p_k wie oben, und sei P das zughörige Interpolationspolynom. Zeige: Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $b_k\in\mathbb{K}$ so, daß für alle $x\in\mathbb{K}$ gilt $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\prod\limits_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$, wobei die übliche Konvention zu beachten ist, daß ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll. Diskutiere insbesondere, wieweit sich die b_k (nicht) ändern, wenn man eine weitere Stützstelle hinzunimmt. Diese Darstellung heißt Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms.

Lösung:

$$p_0=P(x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)=b_0\prod_{j=0}^{0-1}(x_0-x_0)=b_0$$

$$p_1=P(x_1)=b_0+b_1(x_1-x_0)\ \Rightarrow\ \frac{p_1-p_0}{x_1-x_0}=b_1$$

$$p_\mu=\sum_{k=0}^{\mu}b_k\prod_{j=1}^{\mu-1}(x_\mu-x_k)=b_\mu\prod_{j=1}^{\mu-1}(x_\mu-x_j)+\ldots$$

A1.9.11 Berechne das Interpolationspolynom zu den Daten $x_0=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$, sowie $p_0=1$, $p_1=2$, $p_2=1$.

Lös: $P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)$

$$p_0=P(x_0)=P(0)=1=b_0+b_1(\underbrace{\underset{x}{0}-\underset{x_0}{0}}_{0})+b_2*0\ \Rightarrow\ b_0=1$$

$$p_1=P(x_1)=P(-1)=2=\underset{b_0}{1}+b_1(\underset{x}{-1}-\underset{x_0}{0})+b_2(-1-0)(-1-(-1))\ \Rightarrow\ 2=1-b_1\ \Rightarrow\ b_1=-1$$

$$p_2=1=P(2)=1-(2-0)b_2(2-0)(2-(-1))\ \Rightarrow\ 1=-1+6b_2,b_2=1/3$$

A1.9.12 Finde das Interpolationspolynom vom Grade ≤ 3 zu den Stützstellen $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$ und den Werten $P_0=P_1=0$, $P_2=P_3=1$

Lös: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$

$a_0+a_10+a_20+a_30=0 \Rightarrow a_0=0$

$\Rightarrow a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$a_1+a_2+a_3=0$ $\qquad$ $2a_2=1,\ a_2=1/2,\ a_1+1/2+a_3=0$

$-a_1+a_2-a_3=1$ $\qquad$ $2a_1+2+8a_3=1$

$2a_1+4a_2+8a_3=1$ $\qquad$ $2a_1+1+2a_3=0$

$a_1=-1/2+1/6=-1/3$ $\qquad$ $1+6a_3=1,\ a_3=0$

Andere Formulierung

$$P(x)=\sum_{k=0}^{3} p_kL_k(x)$$

$$L_2(x)=\prod_{j=2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_3(x)=\prod_{j=3}\frac{x-x_j}{x_3-x_j}=\frac{x^3-x}{6}$$

$$P(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}+\frac{x^3-x}{6}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

A1.9.13 Bestimme die Nullstellen der Polynome $P(x)$ als Elemente von $\mathbb{R}[x]$ bzw $\mathbb{C}[x]$:

a) $P(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x$

Lös: Nullstellen bei 0 und 1....$=x(x-1)(x^2-x-6)=$ $x(x-1)(x-3)(x+2)$

4 reelle Nullstellen. Gleiche Nullstellen in $\mathbb{C}[x]$.

b) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$

Lös:…Nullstellen $-1,2$. …$=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=$ $(x+1)(x-2)(x-1)^2+2$...2reelle Nullstellen, in $\mathbb{C}$ 2 weitere komplexe Nullstellen. $x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{12-4}}{2}=1+i\sqrt{2},\ 1-i\sqrt{2}$

A1.10.9 Zeige, daß die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden Funktion ebenfalls streng monoton wachsend ist,

A1.10.10 Finde heraus, für welche $n\in\mathbb{N}$ die Abb $x \mapsto x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv ist, sodass sich die nte Wurzelfunktion auch für negative x definieren läßt.