

1.2(400) Die Anordnungsaxiome

Axiomatische Beschreibung einer linearen Anordnung aller Elemente eines Körpers

D1.2.1(400) Ein Körper $(K, +, *)$ heißt angeordnet: \Leftrightarrow Auf K existiert eine Anordnungsrelation $R := <$ („kleiner“), die folgende Eigenschaften (Anordnungsaxiome) erfüllt:

(O1) $\forall a, b \in K$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:

$a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ (Trichotonie)

$\forall a, b \in K ((a, b) \in < \text{ oder } (b, a) \in < \text{ oder } a = b)$

(O2) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität) $\forall a, b, c \in K$

$(a, b) \in < \text{ und } (b, c) \in < \Rightarrow (a, c) \in <$

(O3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K$

$a < b \text{ und } 0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ (Monotonie)

$(a, b) \in <, (a + c, b + c) \in < \quad \forall c \in K$

$(a, b) \in < \text{ und } (0, c) \in < \Rightarrow (a * c, b * c) \in < \subset K \times K = K^2$

Bezeichnungen, Sprechweisen $a, b \in K$

K angeordneter Körper: $(K, +, *, <), < \subset K \times K = K^2$

a kleiner b : $\Leftrightarrow a < b$,

a größer b : $\Leftrightarrow b < a$ bzw $a > b$

a ist positiv(negativ): $\Leftrightarrow 0 < a$ bzw $a > 0$ ($a < 0$ bzw $0 > a$)

a ist kleiner oder gleich b : $\Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$, ($a \leq b, b \geq a$)

a ist größer oder gleich b : $\Leftrightarrow a > b$ oder $a = b$, ($a \geq b$)

a ist nicht negativ: $\Leftrightarrow a \geq 0 \quad 0 \leq a$

Andere Formulierung (siehe auch A1.2.5. b). Besser erst nach A1.2.5 genauer lesen. K_+ ist für Lösung A1.2.5 wichtig):

Ein Körper K heißt geordnet/wenn es eine Teilmenge K_+ gibt, welche folgende Eigenschaften besitzt:

(O1*) $\forall a \in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$a \in K_+$ oder $-a \in K_+$ oder $a = 0$

(O2*) $\forall a \in K_+: a + b \in K_+$

(O3*) $\forall a, b \in K_+: ab \in K_+$

Die Menge K_+ heißt auch positiver Kegel von K und jedes $a \in K_+$ heißt positiv. Ist $-a \in K_+$, so heißt a negativ. Wir können also die Axiome (O1)-(O3) wie folgt in Worte fassen: Ein beliebiges $a \in K$ ist entweder positiv oder negativ oder $=0$, und Summe und Produkt von positiven Zahlen sind wieder positiv. Weiter setzen wir noch:

$a < b \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow b - a \in K_+ \quad / \quad a \leq b \Leftrightarrow b \geq a \Leftrightarrow a = b \text{ oder } a < b$

Mit diesen Bezeichnungen folgt direkt aus (O1*), angewandt auf $b - a$:

$\forall a, b \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$

(400) Abgeleitete Rechenregeln in einem angeordneten Körper (RR<)

1.) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$

Bew: Sei $a < b \xrightarrow{(O3)} a + (-b) < b + (-b) \Rightarrow a - b < 0$

$(a - b) + b < 0 + b \Leftrightarrow a + ((-b) + b) < b \Rightarrow a + 0 < b \Rightarrow a < b \dots \dots$

analog $0 < b - a$

2.) $a > b \Leftrightarrow -a < -b$, speziell $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } a > b &\Leftrightarrow b < a \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} b + (-b) < a + (-b) \Leftrightarrow 0 < a + (-b) \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} \\ &-a + 0 < ((-a) + a) + (-b) \Leftrightarrow -a < 0 + (-b) \Leftrightarrow -a < -b \quad (\Rightarrow b < a) \end{aligned}$$

3.) (.) $a, b > 0$ d.h. $a > 0$ und $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

(..) $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$,

(...) $a < 0$ und $b < 0 \Rightarrow ab > 0$

$$\text{Bew: (.) } a > 0, b > 0 \Rightarrow 0 < a, 0 < b \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} 0 \cdot a < ab \Rightarrow 0 < ab$$

$$\text{(..)} a > 0, b < 0 \Rightarrow 0 < a, b < 0 \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} ab < a \cdot 0 \Rightarrow ab < 0$$

$$\begin{aligned} \text{(...)} a < 0, b < 0 &\stackrel{\text{(2.)}}{\Leftrightarrow} -b > 0 = 0 \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} a(-b) < 0(-b) = 0 \Rightarrow a(-b) < 0 \Rightarrow a((-1)b) < 0 \\ &\Rightarrow (-1)(ab) < 0 \Rightarrow -(ab) < 0 \stackrel{\text{(2.)}}{\Leftrightarrow} ab > 0 \end{aligned}$$

4.) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := a \cdot a > 0$, speziell $1 > 0, -1 < 0$

$$\text{Bew: } a \neq 0 \stackrel{\text{(O1)}}{\Leftrightarrow} a > 0 \text{ oder } a < 0 \stackrel{\text{(3.)}}{\Leftrightarrow} a^2 = a \cdot a > 0$$

$$1 = 1 \cdot 1 > 0 \stackrel{\text{(2.)}}{\Leftrightarrow} -1 < 0$$

5.) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$

$$\text{Bew: } a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}, \text{ Annahme } a^{-1} < 0 \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} 1 = a \cdot a^{-1} < 0$$

$1 < 0$ Widerspruch $\Rightarrow a^{-1} > 0$

Analog $a < 0, a^{-1} < 0$

6.) $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } &\stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} a(-c) < b(-c) \Rightarrow a((-1)c) < b((-1)c) \Rightarrow (-1)(ac) < (-1)bc \Rightarrow \\ &- (ac) < - (bc) \stackrel{\text{(2.)}}{\Leftrightarrow} ac > bc \end{aligned}$$

7.) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } 0 < a < b, a^{-1} > 0, b^{-1} > 0 &\Rightarrow a < b \Rightarrow ab^{-1} < bb^{-1} \Rightarrow ab^{-1} < 1 \Rightarrow a^{-1}(a(b^{-1})) < a^{-1} \\ &\Rightarrow 1 \cdot b^{-1} < a^{-1} \Rightarrow b^{-1} < a^{-1} \end{aligned}$$

8.) $a = b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $b \leq a$

Bew: Sei $a \leq b$ und $b \leq a$ und $a \neq b \Rightarrow a < b$ und $b = a$ Widerspruch zu (O1)

Andere Formulierung:

$a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$ oder $(a < b$ und $a > b)$ nicht möglich wegen (O1)

9.) $a < b \Rightarrow \exists c \in (\mathbb{K}, <)$ (z.B. $c = (a+b)/2$, $2 := 1+1$) mit $a < c < b \Rightarrow$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ mit $0 < \lambda < 1$ gilt $a < a\lambda + (1-\lambda)b < b$

$$\text{Bew: } a - ((a\lambda + (1-\lambda)b)) = a(1-\lambda) - (1-\lambda)b = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0} \underbrace{(a-b)}_{<0} \stackrel{\text{(3.)}}{\leq} 0$$

Andere Formulierung:

$$\text{Aus } 0 < \lambda < 1 \text{ folgt } \stackrel{\text{RR Körper}}{\Leftrightarrow} 0 > -\lambda > -1 \stackrel{\text{(O3)}}{\Leftrightarrow} 1 > 1-\lambda > 0 \Rightarrow$$

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a \stackrel{\text{(O3)}}{\leq} \lambda a + (1-\lambda)b \stackrel{\text{(O3)}}{\leq} \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

A1.2.1 Zeige: Aus $a < b$ folgt $a < (a+b)/2 < b$

A1.2.2 Zeige: Ist $a \geq 0$, und gilt $\forall \varepsilon > 0: a \leq \varepsilon$, so folgt $a = 0$

A1.2.3 $a, b, c, d \in (\mathbb{K}, >)$, $b, d > 0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ so gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Lös: $b+d > 0$ und $1/b, 1/d, \frac{1}{b+d} > 0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d) < (a+c)b \Leftrightarrow ab+ad < ab+cb \Leftrightarrow ad < cb \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ und}$$
$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d < (b+d)c \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, was nach Voraussetzung richtig ist. Also folgt die Beh.

// **A1.1.3** (303) $(K, +, *)$. $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b = 2a+2b+a*b+2$, //

// $K^* : \oplus$ und $\otimes \dots$ $0 = -2$, $-a = -a-4$, $1 = -1$, $a^{-1} = \frac{-3-2a}{a+2}$ //

A1.2.4 Kann der Körper (K, \oplus, \otimes) aus A1.1.3 angeordnet werden?

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K $R := <$, Anordnungsaxiome: //

// (O3) $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K$, $a < b$ und $0 < c \Rightarrow a*c < b*c$ //

Lös: Wir verwenden die gleichen Ordnungsrelationen wie beim ursprünglichen Körper. (O1) und (O2) gelten unverändert weiter, unabhängig von den Verknüpfungen

Zu (O3): Es seien $a, b, c \in K$ mit $a < b$

a) $a \oplus c < b \oplus c$:

$$a < b \Rightarrow a+c+2 < b+c+2 \Rightarrow a \oplus c < b \oplus c$$

b) Wenn $c > 0 = -2$ dann folgt $a \otimes c < b \otimes c$:

$$a < b \Rightarrow a \left(\underbrace{c+2}_{>0} \right) < b(c+2)$$

$$\Rightarrow ac+2a < bc+2b \Rightarrow ac+2a+2c+2 < bc+2b+2c+2 \Rightarrow$$

$$ac+2a+2c+2 < bc+2b+2c+2 \Rightarrow a \otimes c < b \otimes c$$

A1.2.5

a) Kann ein Körper mit 3 Elementen angeordnet werden?

// (RR<) (400) 4.) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := a \cdot a > 0$, speziell $1 > 0, -1 < 0$ //

// D1.2.1 (O2) (400) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ //

Lös: Nein, denn: Sei K ein dreielementiger Körper \Rightarrow

K hat die Gestalt $\{0, 1, -1\}$, (0 und 1 liegen in jedem Körper, dazu $-0=0$ und -1 , wobei $-1 \neq 1$, da sonst 2 elementiger Körper)
($1 \neq 0, 1 \neq -1$).

Es gilt hier $2 := 1+1 = -1$, denn $1+0=1, 1+(-1)=0$.

Wäre $1+1=1$, so $1=0$ weil auch $1+0=1$ Widerspruch bzw

$1+1=0$, so $1=-1$ da auch $1+(-1)=0$ Widerspruch \Rightarrow

Annahme: K kann angeordnet werden? \Rightarrow

$$0 \underset{4.)}{\leq} 1=1+0 \underset{(O2) \dots 0 < 1}{\leq} 1+1=2 \in K = \{0, 1, -1\} \Rightarrow 0 < 1 < 1+1=2$$

Falls $2=0 \Rightarrow 0 \underset{(O2)}{\leq} 2=0$ Widerspruch,

Falls $2=1 \Rightarrow 1 < 2=1$ Widerspruch,

Falls $2=-1 \Rightarrow 0 < 2=-1$ Widerspruch zu Regel (4) \Rightarrow

Annahme falsch, also kann K nicht angeordnet werden

oder: $0 < 1=1+0 < 1+1=-1 \Rightarrow 0 < -1$ Widerspruch zu (O1),

denn $0 > -1$ (ausführlich steht hier $0 < 1$ und $1 < -1$)

Bem: Kein endlicher Körper kann angeordnet werden

(Beweisidee: $0 < 1 < 2 < 3 \dots < -1$ Widerspruch)

b) Beweise: Ein Körper K ist genau dann ein angeordneter Körper, wenn eine Teilmenge $P \subset K$ existiert, so dass gilt:

- (P1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der Alternativen $x=0$, $x \in P$ oder $-x \in P$.
- (P2) Aus $x, y \in P$ folgt $x+y \in P$
- (P3) Aus $x, y \in P$ folgt $xy \in P$

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R := <$, Anordnungsaxiome://
 //(01) $\forall a, b \in K$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://
 // $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ (Trichotonie) //
 //(RR<) (400) 2.) $a > b \Leftrightarrow -a < -b$, speziell $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ //
 //siehe auch D1.2.1 andere Formulierung//

Bew: " \Rightarrow " „ K angeordnet \Rightarrow (P1)...(P3) gilt

Def $P := \{x \in K : x > 0\} \Rightarrow P \subset K$ (Menge der positiven Elemente von K) \Rightarrow ...Rechne P(1)...P(3) nach.

- Zu P(1): Sei $x \in K$ beliebig. Setze $a = x$ und $b = 0 \xrightarrow{(01)}$
 Es gilt genau eine der drei Aussagen:
 - $x < 0$ oder • $0 < x$ oder • $x = 0$, d.h.
 - $-x > -0 = 0$ oder • $x > 0$ oder • $x = 0$, d.h.
 - $x = 0$ oder • $x < 0 \xleftrightarrow{RR\ 2.}) -x > 0$ oder • $x > 0$ d.h.
 - $x = 0$ oder • $-x > 0 \in P$ oder • $x \in P$

//(03) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \ \forall c \in K$ $a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //
 //(02) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität) $\forall a, b, c \in K$ //

- Zu P(2): Seien $x, y \in P$, d.h. $x > 0, y > 0 \Rightarrow x = x + 0 \xrightarrow{(03), \text{mit } 0 < y} y + x = x + y$
 $\xrightarrow{(02)} 0 < x + y$, d.h. $x + y \in P$

//(RR<) (400) (.) $a, b > 0$ d.h. $a > 0$ und $b > 0 \Rightarrow ab > 0$ //
 // (..) $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$, //
 // (...) $a < 0$ und $b < 0 \Rightarrow ab > 0$ //

- Zu (P3): Es seien $x, y \in P \Rightarrow 0 < x$ und $0 < y \Rightarrow 0 * y < x * y \Rightarrow x * y \in P$

„ \Leftarrow “ Sei $P \subset K$ mit (P1)-(P3) erfüllt.

Definition Relation $<$ auf K : durch $a < b: \Leftrightarrow b - a \in P$.

Rechne jetzt (01)-(03) nach:

(01) (400) $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ (Trichotonie)

- Zu (01): Seien $a, b \in K$ beliebig. Mit $x := b - a$ folgt aus (P1): Es gilt genau eine der 3 folgenden Aussagen

- $x = 0$ oder • $x \in P$ oder • $\overbrace{-x}^{-(b-a)} \in P$, d.h.
- $b - a = 0$ ($a = b$) oder • $a < b$ oder • $a - b \in P$, d.h.
- $\underbrace{a = b}_{b-a=0 \text{ (Bew Körperax)}} \text{ oder } \bullet a < b \text{ oder } \bullet b < a$

Nebenrechnung: $-(b-a) = a-b$, denn

$$-x = -(b + (-a)) = -b - (-a) = -b + (-(-a)) = -b + a = a + (-b) = a - b$$

(O2) (400) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$

(A1) (300) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in K,$

(A2) $a \oplus 0 = a \quad \forall a \in K$

(A3) $a \oplus (-a) = 0$

(A4) $a \oplus b = b \oplus a \quad \forall a, b \in K$

• Zu (O2): Seien $a < b$ und $b < c$ d.h.

$b - a \in P$ und $c - b \in P$ (nach Def von $<$) $\Rightarrow c - a =$

$$\underbrace{(c - b)}_{=x \in P} + \underbrace{(b - a)}_{=y \in P} \in P \text{ nach (P2)} \xrightarrow[\text{Def } <]{\Rightarrow} a < c$$

ausführlicher: Klammern werden weggelassen

$$\text{wegen (A1), } c - a \stackrel{(A2)}{=} c + 0 - a \stackrel{(A3)}{=} \underbrace{c + (-b)}_{=c-b} + b - a$$

// (O3) (400) (.) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K,$ (..) $a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

// (403) (P3) Aus $x, y \in P$ folgt $xy \in P$ //

• Zu (O3): (.) Sei $a < b$ und $c \in K$ beliebig, d.h. $b - a \in P \Rightarrow$

$$(b + c) - (a + c) \stackrel{(A2, A3)}{=} b - a \in P \xrightarrow[\text{Def } <]{\Rightarrow} a + c < b + c$$

(..) Sei $a < b$ und $c > 0$ d.h. $b - a \in P$ und $c - 0 \in P \Rightarrow$

$$bc - ac \stackrel{\text{Körperax., (D) und Rechenr.}}{=} \underbrace{(b - a)}_{\in P} \underbrace{c}_{\in P} \in P \text{ (nach (P3))} \Rightarrow$$

$$ac < bc$$

$$\text{ausführlich: } bc - ac = bc + (-ac) = bc + (-a)c = (b + (-a))c = (b - a)c$$

c) Zeige, dass ein angeordneter Körper unendlich viele Elemente haben muss.

A1.2.6 Beweise $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ für $0 \leq a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

// (O3) (400) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K,$ $a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

Lös: Für $a=0$ oder $a=b$ ist die Beh erfüllt

$$\text{Es sei } 0 < a < b \xrightarrow{(O3)} a + ab \stackrel{(O3)}{<} b + ab \Rightarrow a(1+b) < b(1+a) \xrightarrow{1+b > 0, 1+a > 0}$$

$$\frac{1}{1+a} * \frac{1}{1+b} > 0 \xrightarrow{(O3)} a(1+b) \frac{1}{1+a} * \frac{1}{1+b} < b(1+a) \frac{1}{1+a} * \frac{1}{1+b} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$$

A1.2.7 Seien a, b, c, d Elemente eines angeordneten Körpers. Bestimme alle $x \in K$, für die gilt:

a) *: $\frac{d}{b+c} < \frac{d}{x+c} \leq \frac{d}{a+c}$ ($0 < a < b$, $0 < c$, d beliebig)

Lös: 1. Fall $d > 0 \Rightarrow d^{-1} > 0$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b+c} < \frac{1}{x+c} \leq \frac{1}{a+c} \quad \Leftrightarrow \quad a+c \leq x+c < b+c \Leftrightarrow$$

$$a \leq x < b \quad (*) \Rightarrow a \leq x < b \text{ (notwendig)}$$

$$a \leq x < b \Rightarrow (*) \text{ hinreichend}$$

2. Fall $d=0$ (*) $0 < 0 \leq 0$ nie erfüllt für $x \in K$.

3. Fall $d < 0$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{x+c} < \frac{1}{b+c} \Rightarrow b < x \leq a \text{ notwendig, nicht hinreichend, da } a < b \text{ nie erfüllt.}$$

b) Ist $b, d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Bew: Es ist $b+d > 0$ und $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{b+d} > 0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d) < (a+c)b \Leftrightarrow ab+ad < ab+cb \Leftrightarrow ad < cb \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ und}$$

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d < (b+d)c \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

c) *: $x^2 + (a-b)x - ab \geq 0$ ($a, b \geq 0$)

Lös: * $\Leftrightarrow (x+a)(x-b) \geq 0 \Leftrightarrow$

• $[(x+a) \geq 0 \text{ und } (x-b) \geq 0]$ oder • $[(x+a) \leq 0 \text{ und } (x-b) \leq 0]$ $\Leftrightarrow_{0 < a, b, -a < 0 < b}$

• $(x \geq -a \text{ und } x \geq b)$ oder • $(x \leq -a \text{ und } x \leq b)$ $\Leftrightarrow_{0 < a, b, -a < 0 < b}$ $x \geq b$ oder $x \leq -a$

D1.2.2 (405) Sei $K = (K, +, *, <)$ ein angeordneter Körper und $T \subset K$, $T \neq \emptyset$. Ein Element $\bar{m} \in T$ heißt das Maximum von T ($\bar{m} = \max T$): $\Leftrightarrow \forall t \in T$ gilt $t \leq \bar{m}$

Ein Element $\underline{m} \in T$ heißt das Minimum von T ($\underline{m} = \min T$): $\Leftrightarrow \forall t \in T$ gilt $\underline{m} \leq t$

Bem: 1.) Zu $T \subset K$, $T \neq \emptyset$ muß kein $\max T$ bzw $\min T$ existieren

2.) Sei $T_1 \subset T_2 \subset K$ und $\exists \bar{m}_i = \max T_i$, $i=1, 2 \Rightarrow \bar{m}_1 \leq \bar{m}_2$

Bew: $\forall t \in T_2$: $t \leq \bar{m}_2$, $\bar{m}_1 \in T_1 \subset T_2 \Rightarrow \bar{m}_1 \leq \bar{m}_2$

$T_1 \subset T_2 \subset K \exists \bar{m}_1 = \max T_1, \bar{m}_2 = \max T_2 \Rightarrow t \leq \bar{m}_2 \quad \forall t \in T_2$

Da $\bar{m}_1 \in T_1 \subset T_2 \Rightarrow \bar{m}_1 \leq \bar{m}_2$

Analog gilt $\exists \underline{m}_i = \min T_i$, $i=1, 2 \Rightarrow \underline{m}_1 \geq \underline{m}_2$

3.) Wenn für $T \subset K$, $T \neq \emptyset$ $\max T$ oder $\min T$ existiert, so ist dieses eindeutig.

// (RR<) (400) 8.) $a=b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $b \leq a$ //

Bew: Annahme \bar{m}_1, \bar{m}_2 seien ein $\max T$, d.h. $\bar{m}_1 \geq t, \bar{m}_2 \geq t \Rightarrow \bar{m}_1, \bar{m}_2 \in T$ und $\forall t \in T: t \leq \bar{m}_1$ und $t \leq \bar{m}_2$ mit $t = \bar{m}_2$ bzw $t = \bar{m}_1 \Rightarrow \bar{m}_2 \leq \bar{m}_1$ und $\bar{m}_1 \leq \bar{m}_2 \xrightarrow{8.)_{RR<}} \bar{m}_1 = \bar{m}_2$

oder siehe weiter unten D1.3.1 zusätzliche Ausführungen

Bsp: Sei K angeordneter Körper und $T := (0, 1] := \{x \in K \mid 0 < x \leq 1\} \Rightarrow$

1.) $\max T = 1$ da $1 \in T$ und es gilt $x \leq 1 \forall x \in T$

2.) T hat kein Minimum

// (RR<) (400) 9.) $a < b \Rightarrow \exists c \in (K, <)$ mit $a < c < b \Rightarrow //$

// $\forall \lambda \in K$ mit $0 < \lambda < 1$ gilt $a < a\lambda + (1-\lambda)b < b //$

// D1.2.1 (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R := <$, Anordnungsaxiome: //

// (O2) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c \forall a, b, c \in K //$

Bew: 1.) Def $T \Rightarrow x \leq 1 \forall x \in T$ und $1 \in T \Rightarrow 1 = \max T$

2.) Annahme: $\exists \min T = \underline{x} \in T \Rightarrow 0 < \underline{x} \leq 1$ und $x \geq \underline{x} \forall x \in T \xrightarrow{RR< 9.)}$

$\exists x_0 \in K: 0 < x_0 < \underline{x} \xrightarrow{(O2)} 0 < x_0 < 1 \Rightarrow x_0 \in T$ und $x_0 < \underline{x} \Rightarrow$

Widerspruch zur Def $\underline{x} = \min T$

Andere Formulierung:

Annahme: $x_0 = \min T \Rightarrow x_0 > 0$ (wegen $x_0 \in T$) $\xrightarrow{(RR<)} 0 < \frac{x_0 + 0}{2} < x_0 \leq 1,$

$\frac{x_0}{2} \in T$ und $\frac{x_0}{2} < \min T$ Widerspruch, also existiert $\min T$ nicht.

D1.2.3 (407) Sei K angeordneter Körper und $a \in K$ dann heißt

$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ der Absolutbetrag von a

Bem: 1.) Offensichtlich existiert das \max wie angegeben

2.) Für $a, b \in K$ heißt $d = |a - b|$ der Abstand von a und b

S1.2.1 (407) Vor: K sei angeordneter Körper und $a, b \in K$

• Beh: 1.) $|a| = |-a|$

Bew: $|a| := \max\{a, -a\} = \max\{-a, -(-a)\} = |-a|$

• 2.) $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

// D1.2.1 (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R := <$, Anordnungsaxiome: //

// (O1) $\forall a, b \in K$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften: //

// $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b //$

Bew: $|a| \geq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \xrightarrow{(O1)} a > 0$ oder $a < 0$

- 3.) $|ab| = |a| |b|$

Bew: $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$, $|ab|=0, |a|=0$ oder $|b|=0$

$$a>0 \text{ und } b>0 \Rightarrow ab>0 \Rightarrow |ab|=ab=|a| \cdot |b|$$

$$a>0 \text{ und } b<0 \Rightarrow -b>0 \Rightarrow a(-b)>0 \Rightarrow |a \cdot b| = -(ab) =$$

$$a(-b) = |a| \cdot |b|$$

$$a<0 \text{ und } b<0 \Rightarrow a \cdot b = (-a)(-b)>0 \Rightarrow |ab|=ab=$$

$$(-a)(-b) = |a| \cdot |b|$$

- 4.) $(\cdot) b \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} = |a| \cdot |b|^{-1}$, speziell $(\cdot\cdot) |b^{-1}| = |b|^{-1}$

Bew: $(\cdot) \left| \frac{a}{b} \cdot b \right| = |a| \stackrel{3.)}{=} \left| \frac{a}{b} \right| |b| \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

$$(\cdot\cdot) 1 = |1| = |bb^{-1}| = |b| |b^{-1}| \Rightarrow |b^{-1}| = \frac{1}{|b|}$$

- 5.) $a=0 \Leftrightarrow |a| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{K} \text{ mit } \varepsilon > 0$

// **(RR<)** (400) 9.) $a < b \Rightarrow \exists c \in (K, <)$ mit $a < c < b \Rightarrow //$
 $\forall \lambda \in K$ mit $0 < \lambda < 1$ gilt $a < a\lambda + (1-\lambda)b < b //$

Bew: „ \Rightarrow “ $a=0 \Rightarrow |a|=0 \Rightarrow 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{K}$

„ \Leftarrow “ Sei $|a| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{K}, \varepsilon > 0$. Annahme $a \neq 0 \Rightarrow$

$$|a| > 0 \quad (0 < \frac{0 + |a|}{2} < |a|) \Rightarrow \text{Widerspruch, da mit}$$

$$\varepsilon_0 = |a| > 0 \Rightarrow \exists \quad \varepsilon > 0 \text{ mit } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |a|$$

- 6.) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R := \langle, \text{Anordnungsaxiome} //$
 $// (O3) a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K, a < b$ und $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c //$

Bew: Aus Def $|a|, |b| \Rightarrow \pm a \leq |a|, \pm b \leq |b| \stackrel{(O3)}{\Rightarrow} (\pm a) + (\pm b) \leq |a| + |b| \Rightarrow$

$$\pm(a+b) \leq |a| + |b| \Rightarrow \max\{(a+b), -(a+b)\} = |a+b| \leq |a| + |b|$$

- 7.) $|a+b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$

Bew: $|a| = |a+b-b| \stackrel{6.)}{\leq} |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$

$$|b| = |a+b-a| \leq |a+b| + |a| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b|, \quad |b| - |a| \leq |a+b| \Rightarrow$$

$$\pm(|a| - |b|) \leq |a+b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a+b|$$

- 8.) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Linke Ungleichung heißt Dreiecksungleichung nach unten.

Bew: $\pm a \leq |a|, \pm b \leq |b| \Rightarrow \pm(a \pm b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Weiter ist $|a| = |a \pm b \mp b| \leq |a \pm b| + |b|$ und genauso ist

$$|b| \leq |a \pm b| + |a| \Rightarrow \pm(|a| - |b|) \leq |a \pm b| \Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a \pm b|$$

A1.2.8 Zeige: Für $a < b < 0$ ist $|a| > |b| > 0$

A1.2.9 Es seien a, b, c Elemente eines angeordneten Körpers K . Zeige:
a) aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R := \langle, \text{Anordnungsaxiome} \rangle$
// (O2) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in K$ //

Bew: 1. Fall $b = c$, $a < b = c$ d.h. $a < c$

2. Fall $b \neq c \Rightarrow b < c \stackrel{\text{a} < \text{b(O2)}}{\Rightarrow} a < c$

b) $|a+b| = |a| + |b|$ gilt genau dann, wenn $a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

Bew: " \Rightarrow " Sei $|a+b| = |a| + |b|$..

Annahme ($a < 0$ oder $b < 0$) und ($a > 0$ oder $b > 0$) \Rightarrow
 $(a < 0$ und $b > 0)$ oder $(a > 0$ und $b < 0)$.

O.B.d.A.: $a < 0$ und $b > 0$ (sonst vertausche a und b)

$$-a+b \stackrel{\text{Def Betrag}}{=} |a| + |b| = |a+b| = \begin{cases} a+b & \text{falls } a+b > 0 \\ -(a+b) & \text{falls } a+b < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-a = a \text{ oder } b = -b \Rightarrow 2a = 0 \text{ oder } 2b = 0 \stackrel{2 \neq 0}{\Rightarrow}$$

$\underbrace{a = 0 \text{ oder } b = 0}_{\text{angeordneter Körper}}$ Widerspruch, also Annahme falsch,

d.h. $a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$

" \Leftarrow " Sei $a, b \geq 0$ oder $a, b \leq 0$.

$$1. \text{ Fall: } a, b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 0 \Rightarrow |a+b| \stackrel{\text{Def}}{=} a+b = |a| + |b|$$

$$2. \text{ Fall: } a, b \leq 0 \Rightarrow a+b \leq 0$$

$$\text{Bew: } -a \geq 0, -b \geq 0 \stackrel{\text{s. l. Fall}}{\Rightarrow} \underbrace{(-a) + (-b)}_{-(a+b)} \geq 0 \Rightarrow a+b \leq 0$$

$$|a+b| \stackrel{\text{Def}}{=} -(a+b) = -a-b = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

Andere Formulierung:

Bew: " \Leftarrow " Sei $a \geq 0$ und $b \geq 0$ dann gilt $|a| + |b| = \underbrace{a+b}_{\geq 0} = |a+b|$.

Wenn $a \leq 0$ und $b \leq 0$ dann $|a| + |b| = \underbrace{-a-b}_{\geq 0} = |-a-b| = |a+b|$.

" \Rightarrow " $|x|^2 = x^2$ da $x^2 = (-x)^2$ (siehe auch c)

$$\text{Sei } |a+b| = |a| + |b| \Rightarrow |a+b|^2 = (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2 \underbrace{|ab|}_{\text{RR}} + |b|^2 \Rightarrow$$

$$2ab = 2|ab| \Rightarrow ab \geq 0 \text{ d.h. } (a \geq 0 \text{ und } b \geq 0) \text{ oder wenn } (a \leq 0 \text{ und } b \leq 0)$$

$$\text{Hierbei wurde benutzt: } x^2 = \begin{cases} x \cdot x \\ (-x) \cdot (-x) \end{cases} = |x| |x| = |x|^2$$

c) $a^2 < b^2$ gilt genau dann, wenn $|a| < |b|$

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R:=<$, Anordnungsaxiome://
 // (O2) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in K$ //
 // (O3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K, a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

Bew: " \Rightarrow ", Sei $a^2 < b^2$.

1. Möglichkeit:

Annahme $|a| \geq |b| \Rightarrow \underbrace{|a|^2}_{a^2} = a^2 = |a| \cdot |a| \stackrel{\text{mit (O3)}}{\geq} |a| \cdot |b| \geq \underbrace{|b| \cdot |b|}_{|b|^2} = b^2 \stackrel{\text{(O2)}}{\Rightarrow} a^2 \geq b^2$ Widerspruch, also Annahme falsch d.h. $|a| < |b|$

// **(RR<)** (400) 2.) $a > b \Leftrightarrow -a < -b$, speziell $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ //
 // 3.) (.) $a, b > 0$ d.h. $a > 0$ und $b > 0 \Rightarrow ab > 0$ //
 // (...) $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$, //
 // (...) $a < 0$ und $b < 0 \Rightarrow ab > 0$ //

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf $R:=<$, Anordnungsaxiome://
 // (O3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K, a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

2. Möglichkeit:

$(b-a)(b+a) = b^2 - a^2 > 0 \stackrel{\text{RR 3.})}{\Rightarrow} b-a > 0$ und $b+a > 0$ oder $b-a < 0$ und $b+a < 0 \Rightarrow$

$(b > a$ und $b > -a)$ oder $\underbrace{(b < a \text{ und } b < -a)}_{-b > -a \text{ und } -b > a} \Rightarrow$

$b > |a|$, insbesondere $b > 0$, oder
 $-b > |a|$, insbesondere $-b > 0, \Rightarrow |b| > |a|$

" \Leftarrow ", Sei $|a| < |b| \Rightarrow a^2 = |a|^2 = |a| \cdot |a| \stackrel{\text{(O3) da } |a| < |b|}{\leq} |a| \cdot |b| \stackrel{\text{(O3) da } |b| > 0, |a| < |b|}{\leq}$

$|b| \cdot |b| = |b|^2 = b^2$ d.h. $a^2 \leq |a| \cdot |b|$ und $|a| \cdot |b| < b^2 \stackrel{\text{vgl Teil a}}{\Rightarrow} a^2 < b^2$

Hierbei wurde benutzt:

$$x^2 = \begin{cases} x \cdot x \\ (-x) \cdot (-x) \end{cases} = |x| \cdot |x| = |x|^2 \text{ sowie}$$

$x < y, 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$ (Bew: 1. Fall: $z=0 \Rightarrow xz=0 \leq 0=yz$

2. Fall: $z \neq 0$, d.h. $z > 0 \stackrel{\text{(O3)}}{\Rightarrow} xz < yz \Rightarrow$

$xz \leq yz$)

d) $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$

// **D1.1.1** (300/301)//

// Menge min 2 Elemente: K //

// $(K, \oplus, \otimes): \Leftrightarrow \exists$ 2 Abbildungen $\oplus: K \times K \rightarrow K$ und $\otimes: K \times K \rightarrow K$ //

// (A1) $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad \forall a, b, c \in K$ //

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K $R:=<$, Anordnungsaxiome://

// (O3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K, a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

Bew: $(a+b)^2 - 4ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 4ab \stackrel{\text{Rechenr in K}}{=} a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 + 2a(-b) + (-b)^2) =$

$(a-b)^2 \geq 0$ (wg $x^2 > 0 \quad \forall x \in K \setminus \{0\}$) $\stackrel{\text{A1...mit(O3)}}{\Rightarrow} (a+b)^2 \geq 4ab$

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$
 weil $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2$

Andere Formulierung für $(a+b)^2 \geq 4ab$:

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Die Aussage $(a-b)^2 \geq 0$ ist aber richtig (RR im Körper) und daher auch die äquivalente Aussage $(a+b)^2 \geq 4ab$

A1.2.10 Beweise: $\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

// **A1.2.6** (404) $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ für $0 \leq a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. //

$$\begin{aligned} \text{Bew: } \frac{x+y}{1+|x+y|} &\leq \frac{\overbrace{|x+y|}^a}{1+\overbrace{|x+y|}^a} \stackrel{\text{A1.2.6}}{\leq} \frac{\overbrace{|x|+|y|}^b}{1+\overbrace{|x|+|y|}^b} = \\ &\frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \end{aligned}$$

A1.2.11 $(a_n) \in \mathbb{R}$, $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \in \mathbb{R}$, $a_n \leq c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige $a \leq c$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow a_n - \varepsilon < a < a_n + \varepsilon < c + \varepsilon$

Annahme $a > c \Rightarrow a > c$, $a < c + \varepsilon \Rightarrow 0 < a - c < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\varepsilon := \frac{a-c}{2} > 0 \Rightarrow 0 < a - c < \frac{a-c}{2} \dots \dots$ Widerspruch!

b) $a_n := 1 - \frac{1}{n} < 1 = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lös: $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \Rightarrow a = c$

D1.2.4(412) Für $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases} \text{ das Vorzeichen oder das Signum von } a \text{ und}$$

$$|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \text{ der Betrag von } a$$

S1.2.2(412) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ gilt

1.) $a = b \Leftrightarrow |a| = |b|$ und $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$

2.) $\operatorname{sgn}(ab) = (\operatorname{sgn} a)(\operatorname{sgn} b)$, $|ab| = |a||b|$

3.) $b \neq 0 \Rightarrow (\operatorname{sgn} a) / (\operatorname{sgn} b) = \operatorname{sgn}(a/b)$, $|a/b| = |a|/|b|$