

1.3(500) Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen

Alle bisherigen Überlegungen gelten z.B auch für den Körper der rationalen Zahlen.

D1.3.1(500) Sei $(K, <)$ angeordneter Körper $T \subset K$, $T \neq \emptyset$

1.) Ein Element $\bar{s} \in K$ ($\underline{s} \in K$) (\bar{s}, \underline{s} müssen nicht zu T gehören) heißt obere (untere) Schranke von T : $\Leftrightarrow \forall t \in T$ gilt $t \leq \bar{s}$ ($t \geq \underline{s}$)

2.) T heißt nach oben (unten) beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ eine obere (untere) Schranke von T

3.) T heißt beschränkt: $\Leftrightarrow T$ ist nach oben und unten beschränkt.

4.) Ein $\bar{s} \in K$ ($\underline{s} \in K$) heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von T (größte untere Schranke oder Infimum von T): \Leftrightarrow

$\alpha)$ \bar{s} (\underline{s}) ist obere (untere) Schranke von T

$\beta)$ $\bar{s} \leq \bar{s}' \forall$ oberen Schranken \bar{s}' von T ($\underline{s} \geq \underline{s}' \forall$ unteren Schranken \underline{s}' von T)

Bez: $\bar{s} = \sup T$ ($\underline{s} = \inf T$)

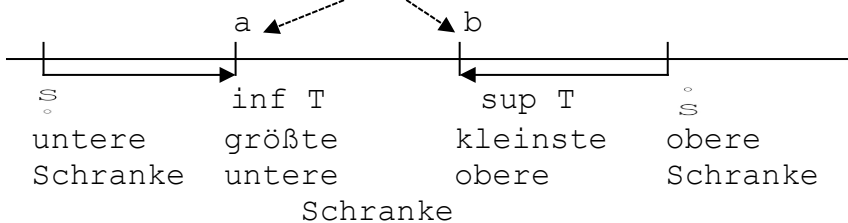
Andere Formulierung:

$a = \sup A: \begin{cases} \forall x \in A: x \leq a \text{ d.h. } a \text{ ist obere Schranke von } A \\ \forall c \in R: x \leq c \forall x \in A \Rightarrow a \leq c, \text{ d.h. } a \text{ ist kleinste obere Schranke von } A \end{cases} \Leftrightarrow$

Bem: $a \in T$, z.B. $T = \{t \mid t \geq a\} \Rightarrow a = \inf T = \min T$
 $a \notin T$, z.B. $T = \{t \mid t > a\} \Rightarrow a = \inf T \neq \min T$

Bsp/Merkskizze

$T = \{x \mid a < x < b\}$, *d.h. $a, b \notin T$



Bez: 1.) Ist $T \subset K$ nach oben/unten nicht beschränkt, so schreibt man $\sup T := \infty$ ($\inf T := -\infty$) (dann existiert $\sup T / \inf T$ nicht)

2.) Für $T = \emptyset$ sei $\sup \emptyset := -\infty$, $\inf T := +\infty$

Bem: 1.) $T \subset K$ ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists c \in K$ mit $|t| \leq c \forall t \in T$

2.) Falls existent, sind $\sup T$ und $\inf T$ eindeutig bestimmt

Bew: $s_1, s_2 = \sup T \Rightarrow s_1 \leq s_2$ und $s_2 \leq s_1 \Rightarrow s_1 = s_2$

3.) Sei $T \subset K$, $T \neq \emptyset$, $\exists \sup T$ bzw $\inf T \Rightarrow$

$\sup T = \min\{\bar{s} \mid \bar{s} \text{ ist obere Schranke von } T \text{ in } K\}$

$\inf T = \max\{\underline{s} \mid \underline{s} \text{ ist untere Schranke von } T \text{ in } K\}$

d.h. $\sup T$ und $\inf T$ müssen nicht, können aber $\in K$ sein.

Wenn $\sup T$ bzw $\inf T \in K$, siehe S1.3.1 2.

Zusätzliche Ausführungen:

Seien $A \neq \emptyset$, $A, B \subset K$ und sei $\zeta \in K$. Wir schreiben dann

$A \leq \zeta \Leftrightarrow \zeta \geq A \Leftrightarrow \forall a \in A: a \leq \zeta$ obere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A \geq \zeta \Leftrightarrow \zeta \leq A \Leftrightarrow \forall a \in A: a \geq \zeta$ untere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A \leq B \Leftrightarrow B \geq A \Leftrightarrow \forall b \in B: A \leq b$

Jedes ζ mit $A \leq \zeta$ heißt obere Schranke für A, jedes ζ mit $A \geq \zeta$ heißt untere Schranke für A. Falls A eine obere (untere) Schranke besitzt, dann heißt A nach oben (unten) beschränkt. Falls A nach oben und unten beschränkt ist, nennen wir A kurz beschränkt.

$a \in A$, welches gleichzeitig obere (untere) Schranke von A ist, heißt maximales (minimales) Element oder kürzer Maximum (Minimum) von A und wir schreiben: $a = \max A$ ($a = \min A$).

S1.3.1 (501) Vor.: Sei K angeordnet und $T \subset K$, $T \neq \emptyset$, $s \in K$

Beh: 1.) $\bar{s} = \sup T \Leftrightarrow \alpha) \bar{s}$ ist obere Schranke von T und

$\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\bar{s} - \varepsilon$ keine obere Schranke von T

$\Leftrightarrow \forall t \in T: t \leq \bar{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \bar{s} - \varepsilon$

Bew: Negation von $\beta) : \exists \varepsilon_0 > 0$ aus K und $\forall t \in T: t \leq \bar{s} - \varepsilon_0 \Leftrightarrow$

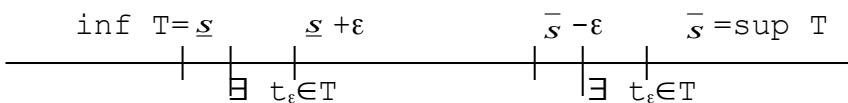
$\exists \varepsilon_0 > 0$ aus $K: \bar{s} - \varepsilon_0$ ist obere Schranke von T, die kleiner als \bar{s} ist

analog

$\underline{s} = \inf T \Leftrightarrow \alpha) \underline{s}$ ist untere Schranke von T und

$\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\underline{s} + \varepsilon$ keine untere Schranke von T

$\Leftrightarrow \forall t \in T: t \geq \underline{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon < \underline{s} + \varepsilon$



2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in K$ und $\sup T \in T: \max T = \sup T$

$\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in K$ und $\inf T \in T: \min T = \inf T$

// **D1.2.2 (405)** $K = (K, +, *, <)$ & $T \subset K$, $T \neq \emptyset$. $\bar{m} = \max T \Leftrightarrow \forall t \in T: t \leq \bar{m}$ //

Bew: „ \Rightarrow “ $\bar{m} := \max T \stackrel{D1.2.2}{\Leftrightarrow} \forall t \in T$ gilt $t \leq \bar{m}$ und $\bar{m} \in T \Rightarrow$

$\bar{m} \leq s \Leftrightarrow \forall$ oberen Schranken von T, \bar{m} obere Schranke von T $\Rightarrow \forall s'$ die obere Schranke von T gilt $t \leq s' \forall t \in T$.

$\bar{m} \in T \Rightarrow \bar{m} \leq s' \Rightarrow \exists \bar{m} = \sup T \in T$

„ \Leftarrow “ $\bar{m} = \sup T$ und $\bar{m} \in T \Rightarrow \forall t \in T: t \leq \bar{m}$. Da $\bar{m} \in T \Rightarrow \exists \max T = \bar{m}$

Bsp: 1.) $T = (0, 1] \Rightarrow 1 = \max T = \sup T$, $0 = \inf T \neq \min T$

2.) $R \supset M = (0, 1) \cup [2, 5]$

$\forall x > 5: m \leq 5 \forall m \in M$, aber x ist nicht kleinste obere Schranke.

Analog für $x = 0$, also $\sup M = \max M = 5$, $\inf M = 0$

3.) $A := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 5\}$
 $\inf A = \min A = 0$.
 Bew: 0 ist untere Schranke da $0 \leq a \forall a \in A$. Sei $r > 0 \Rightarrow$
 r ist keine untere Schranke von A , denn $\tilde{r} := \frac{r}{2} < r$, aber
 $\tilde{r} \in A \Rightarrow 0$ ist größte untere Schranke. $0 \in A$. Analog $\sup A = 1$.
 $1 \notin A \Rightarrow \exists \text{ / } \max A$

4.) $B := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B = 0 \notin B \Rightarrow \nexists \max B$

5.) $x \geq 0, x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$

Bew: " \Leftarrow " $x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x * x \geq \sqrt{2} * \sqrt{2} = 2 > 0$

" \Rightarrow " Annahme $x < \sqrt{2} \Rightarrow x * x < \sqrt{2} * \sqrt{2} = 2 \Rightarrow$

Definiere $C := \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2} \text{ und } x < 3\} \dots$ Beh $\min C = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\sqrt{2} \in C$ und $\sqrt{2} \leq c \forall c \in C \xrightarrow{\exists \min C} \min C = \inf C = \sqrt{2} \xrightarrow{\exists \max C}$

$\forall x \in C: \underset{\in M}{y} = \frac{x+3}{2} > x. \sup C = 3: 3 \geq c \forall c \in C$

6.) Sei $(K, <)$ und $T = \{x \in K \mid -1 < x \leq 0\} = (-1, 0]$

$\max T = \sup T = 0, \inf T = -1, \min T$ existiert nicht.

Bew: $\inf T = -1 \Rightarrow$ Es gilt $-1 \leq x \forall x \in T \Rightarrow -1$ ist untere Schranke.

Annahme: $s > -1$ sei ebenfalls untere Schranke von T .

Definiere $\tilde{s} = \frac{-1+s}{2} \xrightarrow{\mathbb{R} <} -1 < \tilde{s} < s < 0 \Rightarrow \tilde{s} \in T, \text{ aber } \tilde{s} < s$

Widerspruch zu s ist untere Schranke von T

7.) $K = \mathbb{R}, A, B \subset K, A, B \neq \emptyset$ und beschränkt.

Z.z. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Bew: ObdA sei $\sup A \geq \sup B$, z.B. $A = [0, 5), B = (-2, 3) \Rightarrow$

$\sup A = 5, \sup B = 3$

(.) Z.z. $\sup A$ obere Schranke: $\sup A \geq t \forall t \in A \Rightarrow$

$\sup A \geq \sup B \geq b \forall b \in B \Rightarrow \sup A \geq u \forall u \in A \cup B$

(..) $\forall \varepsilon > 0 \exists u \in A \cup B: \sup A - \varepsilon < u, \sup A$ ist Supremum von A d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists u \in A: \sup A - \varepsilon < u, u \in A \Rightarrow u \in A \cup B, \sup A - \varepsilon < u, u := t$

(.) und (..) $\Rightarrow \sup A = \sup A \cup B$

8.) K_+ (d.h. $0 \notin K_+$) ist nach unten beschränkt durch $\zeta = 0$. Ist $\eta \in K_+$

$\Rightarrow \eta/2 \in K_+$ und $\eta/2 < \eta$. Also kann kein Element von K_+

gleichzeitig untere Schranke von K_+ sein und deshalb ist 0 die größte untere Schranke von $K_+ \Rightarrow 0 = \inf K_+. 0 \notin K_+ \Rightarrow K_+$ besitzt kein Minimum.

K_+ nicht nach oben beschränkt, denn gäbe es eine obere

Schranke für K_+ , etwa ζ , so wäre sowohl $\zeta \in K_+$ also auch $\zeta + 1 \in K_+$,

und mit $\zeta + 1 > \zeta$ ergibt sich ein Widerspruch.

9.) Seien $x > 0$ und $A_x = \{a > 0 : a^2 \leq x\}$.

Falls $\zeta = \sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2 = x$.

// **S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K, T \neq \emptyset, s \in K$ //

// 1.) $\overline{s} = \sup T : \Leftrightarrow \alpha) \overline{s}$ ist obere Schranke von T und //

// $\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\overline{s} - \varepsilon$ keine obere Schranke von T //

// $\Leftrightarrow \forall t \in T : t \leq \overline{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \overline{s} - \varepsilon$ //

Bew: Angenommen, daß

1. Fall: $\zeta^2 > x$. Sei $\varepsilon = \frac{(\zeta^2 - x) / (2\zeta)}{<\zeta/2}$ (d.h. $x = \zeta^2 - 2\zeta\varepsilon$) $\Rightarrow 0 < \varepsilon < \zeta/2$. $\xrightarrow{\text{S1.3.1}}$

$\exists a \in A_x : a > \zeta - \varepsilon \Rightarrow x \geq a^2 > (\zeta - \varepsilon)^2 > \frac{\zeta^2 - 2\zeta\varepsilon}{<\zeta^2 - 2\zeta\varepsilon + \varepsilon^2} = x$, was nicht sein kann.

2. Fall: $x > \zeta^2$. (ζ^2 sehr nahe bei x)

Für $\varepsilon = \min\left\{\zeta, \frac{x/\zeta - \zeta}{3}\right\}$ gilt dann $\varepsilon/\zeta \leq 1$, also $(\varepsilon/\zeta)^2 \leq \varepsilon/\zeta$

\Rightarrow für $a = \zeta + \varepsilon = \zeta \cdot 1 + \zeta \cdot \varepsilon/\zeta = \zeta(1 + \varepsilon/\zeta)$:

$$a^2 = \zeta^2(1 + \varepsilon/\zeta)^2 = \zeta^2\left(1 + 2\varepsilon/\zeta + \left(\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)^2\right) \leq \zeta^2(1 + 3\varepsilon/\zeta) =$$

$$\zeta^2\left(1 + \frac{3(x/\zeta - \zeta)}{3\zeta}\right) = \zeta^2 + x - \zeta^2 \leq x.$$

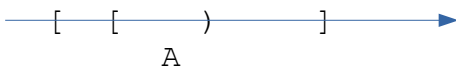
Demzufolge wäre $a = \zeta + \varepsilon \in A_x$, also ζ keine obere Schranke für $A_x \Rightarrow$ Widerspruch zu Def von $\zeta \Rightarrow \zeta^2 = x$

A1.3.1

a) Zeige $(.) A \subset B, \exists \min A, \min B \Rightarrow \min A \geq \min B$

Bew: $a_{\min} A : a \in A \ \& \ A \subset B \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \geq \min B$

Bspskizze



$(..) A \subset B, \exists \inf A, \inf B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$

Bew: $a := \inf A \stackrel{A \subset B}{\Rightarrow} a \in B \stackrel{b := \inf B}{\Rightarrow} a \geq b$?

$A := \inf A, b := \inf B \Rightarrow b \leq x \ \forall x \in B \stackrel{A \subset B}{\Rightarrow} b \leq x \ \forall x \in A \Rightarrow$

b auch untere Schranke von A , d.h. $b \leq a$

$(...) \exists \max A \ \& \ \max B \Rightarrow \exists \max(A \cup B) \ \& \ \max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}$

Bew: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \leq \max A \wedge x \leq \max B \Rightarrow$

$x \leq \max\{\max A, \max B\} \ \forall x \in A \cup B$

Da $\max\{\max A, \max B\} \in A \cup B$ ist $\max\{\max A, \max B\} = \max(A \cup B)$

$$b) M = \left\{ 2 - \frac{n-1/2}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad n \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$t \quad 3/2 \quad 5/4 \quad 7/6 \quad 9/8$$

max, sup, min, inf ?

Lös: Z.z Vermutung max M=3/2

$$(\cdot) n=1 \Rightarrow 2 - \frac{n-1/2}{n} = 3/2 \Rightarrow 3/2 \in M$$

$$(\cdot\cdot) 3/2 \geq t \quad \forall t \in M, \quad 3/2 \geq 1 + 1/2n \Leftrightarrow 3/2 \geq \frac{2n+1}{2n} \Leftrightarrow 6n \geq 4n+2 \Leftrightarrow 2n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1 \Rightarrow 3/2 = \max M = \sup M$$

Z.z Vermutung inf M=1

$$(\cdot) 1 \text{ ist untere Schranke} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2n} > 1$$

$$(\cdot\cdot) \text{Kleinste untere Schranke: } \forall \varepsilon > 0 \exists t \in M: 1 + \varepsilon > t.$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0: 1 + \varepsilon > 1 + \frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n + 2n\varepsilon > 2n + 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

$$\text{Wähle } n \in \mathbb{N}: n > \frac{1}{2\varepsilon}, \quad t_n := 1 + \frac{1}{2n} < 1 + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon}} = 1 + \varepsilon \Rightarrow \inf M = 1$$

Min M=1?

Annahme $\exists \min M$. $\min M \neq 1 \Rightarrow \min M = \inf M$ Widerspruch

A1.3.2 Zeige: Ist $A \subset K$ nach oben (unten) beschränkt, und ist $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, so ist B ebenfalls nach oben (unten) beschränkt)

A1.3.3 Sei $A \subset K$, $A \neq \emptyset$, $B = -A = \{-a : a \in A\}$. Zeige:

a) Genau dann ist A nach oben beschränkt, wenn B nach unten beschränkt

b) Genau dann besitzt A ein Supremum, wenn B ein Infimum besitzt und es gilt $\sup A = -\inf B$.

A1.3.4 Zeige: K selber ist nach oben und unten nicht beschränkt

A1.3.5 Zeige: Genau dann ist ζ Supremum einer Menge $A \subset K$, wenn folgendes gilt: $\forall a \in A: a \leq \zeta$; $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A: a > \zeta - \varepsilon$.

Finde selber eine analoge Charakterisierung für das Infimum von A.

A1.3.6 Seien A, B Teilmengen eines geordneten Körpers.

Definiere $A+B = \{a+b : a \in A \wedge b \in B\}$, $A-B = \{a-b : a \in A \wedge b \in B\}$. Nimm an, dass für alle 4 Mengen A, B, A+B, A-B sup und inf existieren. Zeige:

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Z.z. $\sup A + \sup B$ ist ($\cdot\cdot$) kleinste (\cdot) obere Schranke von A+B

(\cdot) Z.z. $\forall x \in (A+B): x \leq \sup A + \sup B$

Bew: Sei $x \in (A+B)$, $x = a+b$, $a \in A$, $b \in B$. Es gilt

$$\forall a \in A \quad a \leq \sup A, \quad \forall b \in B \quad b \leq \sup B \Rightarrow \forall x = a+b \leq \sup A + \sup B \Rightarrow \text{obere Schranke}$$

($\cdot\cdot$) Sei $A+B \leq m$, Z.z. $\sup A + \sup B \leq m$.

$$A+B \leq m \Rightarrow a+b \leq m \quad \forall a \in A, \quad b \in B \stackrel{\text{bel fest}}{\Rightarrow} a \leq m-b \quad \forall a \in A \Rightarrow$$

$m-b$ obere Schranke von A $\Rightarrow \sup A \leq m-b \quad \forall b \in B$ (da b beliebig

gewählt) $\Rightarrow b \leq \underbrace{m - \sup A}_{\text{obere Schranke v B}} \quad \forall b \in B \Rightarrow \sup B \leq m - \sup A \Rightarrow \sup A + \sup B \leq m$

Ähnliche Aufgabe/Formulierung:

$A, B \subset \mathbb{R}$ seien beschränkte Mengen, d.h. $|a| \leq c_1, |b| \leq c_2 \quad \forall a \in A, b \in B \Rightarrow |a+b| \leq c_1+c_2 \quad \forall a \in A, b \in B \Rightarrow A+B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$ ist beschränkt.
 Es sei $s_1 = \sup A$ und $s_2 = \sup B$. Z.z. $s_1+s_2 = \sup(A+B)$
 Es gilt: $s_1 \geq a, s_2 \geq b \quad \forall a \in A, b \in B \Rightarrow s_1+s_2 \geq a+b \quad \forall a \in A, b \in B \Rightarrow s_1+s_2$ ist obere Schranke.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists a_0 \in A$, mit $a_0 > s_1 - \varepsilon/2$ und $b_0 \in B$, mit $b_0 > s_2 - \varepsilon/2 \Rightarrow a_0+b_0 \in A+B$ mit $a_0+b_0 > s_1+s_2 - \varepsilon \Rightarrow s_1+s_2 = \sup(A+B)$

b) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

Lös: Z.z. $(.) A-B \leq \sup A - \inf B \quad (..) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A-B, x \geq \sup A - \inf B - \varepsilon$
 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. $\exists a \in A: a \geq \sup A - \varepsilon/2,$
 $\exists b \in B: b \leq \inf B + \varepsilon/2, -b \geq -\inf B - \varepsilon/2, \Rightarrow$
 $x = a - b \geq \sup A - \varepsilon/2 - \inf B - \varepsilon/2 = \sup A - \inf B - \varepsilon.$

c) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

d) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$

D1.3.2 (505)

Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ heißt vollständig (bezüglich $<$):
 $\Leftrightarrow \forall T \subset K, T \neq \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists \sup T \in K.$

Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der reellen Zahlen \mathbb{R}

Bem: siehe auch A1.3.13. $K = (K, +, \cdot, <)$ ist vollständig: \Leftrightarrow Jede nach unten beschränkte Menge $T \subset K, T \neq \emptyset$ besitzt ein Infimum $\inf T$ in K

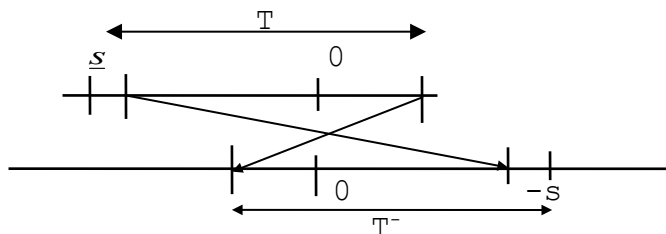
Bew: Sei $T^- := \{x \in K: -x \in T\}$. Dann gilt für $\underline{s} \in K$:

\underline{s} ist untere Schranke von $T \Leftrightarrow \underline{s} \leq t \quad \forall t \in T \Leftrightarrow$

$x \leq -\underline{s} \quad \forall t \in T^- \Leftrightarrow -\underline{s}$ ist obere Schranke von $T^- \Rightarrow \inf T = -\sup T^-.$

K vollständig $\Leftrightarrow \exists \sup T^- \Leftrightarrow \exists \inf T$

#Bsp:



Für den positiven Kegel K_+ schreiben wir künftig auch \mathbb{R}_+ , d.h. $x \in \mathbb{R}_+$ ist gleichbedeutend mit $x > 0$.

//S1.3.1 Bsp 5.) (501) Seien $x > 0$ und $A_x = \{a > 0: a^2 \leq x\}$. //

// Falls $\zeta = \sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2 = x$. //

//D1.3.2 (504) $(K, +, \cdot, <)$ heißt vollständig (bezüglich $<$): $\Leftrightarrow //$

// $\forall T \subset K, T \neq \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists \sup T \in K$. Ein //

// angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt //

// Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} //

Für folgendes siehe auch S1.3.2

Für $x \in \mathbb{R}_+$ haben wir in Bsp 5 bei S1.3.1 gezeigt, daß $A_x = \{a \in \mathbb{R} | a^2 \leq x\} \neq \emptyset$

und nach oben beschränkt ist $\xrightarrow{D1.3.2} \exists \zeta = \sup A_x \xrightarrow{Bsp 5.)} \zeta^2 = x$. Dieses ζ nennen

wir die positive Quadratwurzel von x und schreiben $\zeta = \sqrt{x}$.

Wir setzen $\sqrt{0} = 0$.

Erweiterte reelle Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$:

Wir nehmen zu den reellen Zahlen \mathbb{R} 2 neue Objekte ∞ und $-\infty$ hinzu,

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ und erweiterte Ordnungsrelation $-\infty < x < \infty$ und definieren die kommutativen Operationen $\infty + x = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad \infty * x =$

$$\begin{cases} \infty & \text{falls } x > 0 \\ -\infty & \text{falls } x < 0 \end{cases}, \text{ aber } 0 * \infty \text{ nicht definiert, } \infty * \infty = \infty,$$

$(-\infty) * \infty = -\infty, \quad (-\infty) * (-\infty) = \infty, \quad \frac{x}{\pm \infty} := 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\bar{\mathbb{R}}$ ist kein Körper (siehe nicht definiertes)

Intervalle $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < \infty\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$

D1.3.3 (506) Seien $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b$, Dann sei

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a, b

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, a < b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, a < b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, a < b$ offenes Intervall

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle

Aus dem Zusammenhang muß sich ergeben, ob (a, b) offenes Intervall oder Paar von a und b ist.

A1.3.7 (Dedekindsche Schnitte)

Geg: $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $A, B \neq \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R}, \quad a \leq b \quad \forall a \in A, \quad b \in B$

Z.z.: $\exists_1 s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s \leq b \quad \forall a \in A, \quad b \in B$. (Ersatz für Vollständigkeitsaxiom)

Bew: A ist nach oben beschränkt, denn jedes $b \in B$ ist obere Schranke.

Setze $s = \sup A$. Dann ist offensichtlich $a \leq s \quad \forall a \in A$, s ist kleinste obere Schranke von A , also $s \leq b \in B$.

Noch z.z. ist Eindeutigkeit.

Sei hierzu \tilde{s} mit $a \leq \tilde{s} \leq b \quad \forall a \in A, \quad b \in B$.

Annahme $\tilde{s} \neq s$. Da \tilde{s} obere Schranke von A ist, muss $\tilde{s} > s$ sein.

Dann folgt

$A \cup B \subset (-\infty, s] \cup [\tilde{s}, \infty) \neq \mathbb{R}$. $\frac{s + \tilde{s}}{2} \notin A \cup B$ Widerspruch. Also muss $\tilde{s} = s$ sein.

Andere Formulierung:

Bew: Sei $M \neq \emptyset$, nach oben beschränkt: $\exists \sup M$

Sei $m \in M \quad \tilde{M} = \{x \in M : x \geq m\} \subset M \Rightarrow M$ beschränkt $\quad \exists s : \sup \tilde{M} \Rightarrow$

s ist obere Schranke von $M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \tilde{M} : x > s - \varepsilon \Rightarrow s = \sup M$

A ist nach oben beschränkt, da jedes $b \in B$ obere Schranke.

Setze $s = \sup A \Rightarrow a \leq s \quad \forall a \in A$. s ist kleinste obere Schranke von $A \Rightarrow s \leq b \quad \forall b \in B$.

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{s} : a \leq \tilde{s} \leq b \quad \forall a \in A, \quad b \in B$. Annahme $\tilde{s} \neq s : \tilde{s}$ obere Schranke von A , muss

$\tilde{s} > s$ sein $\Rightarrow A \cup B \subset (-\infty, s] \cup [\tilde{s}, \infty) \neq \mathbb{R}$, da $\frac{s + \tilde{s}}{2} \notin A \cup B$ Widerspruch $\Rightarrow \tilde{s} = s$

A1.3.9 Zeige: Zu einem $y > 0 \quad \exists_1 x > 0 : x^2 = y \Rightarrow$ d.h. oben definierte Quadratwurzel von x ist Umkehrabbildung der Funktion $x \mapsto x^2$

A1.3.10 Finde heraus, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $x = \sqrt{x}$ richtig

bzw falsch ist.

A1.3.11 Zeige, daß das Vollständigkeitsaxiom zu folgenden Aussagen äquivalent ist

- a) Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.
- b) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum
- c) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum

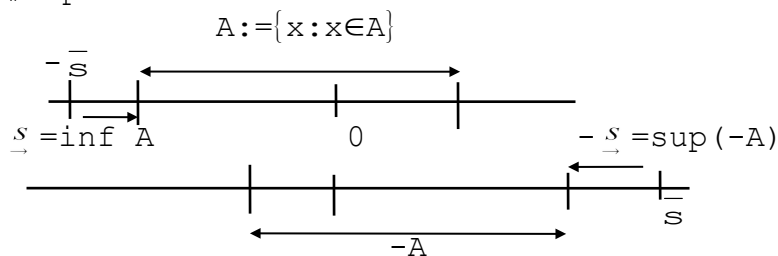
A1.3.12 Zeige: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| = \sqrt{a^2}$

A1.3.13 Es sei K ein angeordneter Körper

a) Definiere für $A \subset K$ die Menge $-A := \{-x : x \in A\}$.

Zeige: Es existiert $\inf A \in K$ genau dann, wenn $\sup(-A) \in K$ existiert und dann gilt: $\inf A = -\sup(-A)$.

#Bsp



Bew: " \Rightarrow " Sei $\underline{s} = \inf A \in K$.

Wir zeigen: $\sup(-A) = -\underline{s} \in K$ (insbesondere existent).

Mit Def:

(α) $-\underline{s}$ ist obere Schranke von $-A$:

$$\underline{s} = \inf A \Rightarrow \underline{s} \leq x \quad \forall x \in A \Rightarrow -\underline{s} \geq -x \quad \forall x \in A \stackrel{\text{Def v } A}{\Leftrightarrow} -\underline{s} \geq y \quad \forall y \in -A$$

(β) $-\underline{s} \leq \overline{s}$ \forall oberen Schranken \overline{s} von $-A$

Sei \overline{s} obere Schranke von $-A$ beliebig \Rightarrow

$-\overline{s}$ untere Schranke von A (denn $\overline{s} \geq y \quad \forall y \in -A \Rightarrow$

$$\overline{s} \geq -x \quad \forall x \in A \Rightarrow -\overline{s} \leq x \quad \forall x \in A) \stackrel{\underline{s} = \inf A}{\Leftrightarrow} -\overline{s} \leq \underline{s} \Rightarrow \overline{s} \geq -\underline{s}$$

„ \Leftarrow “ Analog Aus Bew folgt $\sup(-A) = -\underline{s} = -\inf(A)$

b) Es seien A, B nichtleere Teilmengen von K mit $A \subset B$

(.) Zeige: Falls $\sup A$ und $\sup B$ in K existieren, so gilt $\sup A \leq \sup B$

// Bem: 3.) (500) Sei $T \subset K, T \neq \emptyset, \exists \sup T$ bzw $\inf T \Rightarrow //$

// $\sup T = \min\{s \mid s \text{ ist obere Schranke von } T \text{ in } K\} //$

Lös: z.z. $\exists \sup A, \sup B \in K \Rightarrow \sup A \leq \sup B,$

$\sup A \stackrel{\text{Bem 3}}{=} \min\{s' : s' \text{ ist obere Schranke von } A \text{ in } K\} \stackrel{\text{Abschätzung}}{\leq}$

$\min\{s'' : s'' \text{ ist obere Schranke von } B \text{ in } K\} = \sup B$

Bew: Aus $\Leftarrow \Rightarrow$

Annahme $\exists s_0''$ obere Schranke von B mit $\sup A > s_0'' \stackrel{\text{A} \subset \text{B}}{\Rightarrow}$

s_0'' ist obere Schranke von A mit $\sup A > s_0'' \Rightarrow$

Widerspruch

Bem: $s_0'' \geq b \forall b \in B \Rightarrow s_0'' > a, A \subset B \forall a \in A$

(..) Zeige: Falls $\inf A$ und $\inf B$ in K existieren, so gilt $\inf A \geq \inf B$

Lös: analog (.)

(...) Gibt es solche Mengen $A \neq B$, für die $\inf A, \inf B, \sup A, \sup B$ existieren, mit $\sup A = \sup B$ und $\inf A = \inf B$?

Lös: Sei $B = (0, 1] \Rightarrow \sup B = 1, \inf B = 0$ (insbesondere existent in K).

$A := (0, 1] \setminus \left\{ \underbrace{1/2}_{\text{irgend ein Punkt}} \right\} \Rightarrow \sup A = 1, \inf A = 0.$

analog zum Bew für B

A1.3.14 Es sei K ein angeordneter Körper und $A := \{x \in K : x > 1\}$.

Existieren $\inf A$, $\min A$, $\sup A$, $\max A$ in K ? Bestimme im Falle der Existenz die entsprechenden Werte.

// **D1.2.1** (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K //

// $R := \langle, \text{Anordnungsaxiome} \rangle$ //

// (O2) Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in K$ //

// (O3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K, a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

// **S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K, T \neq \emptyset, s \in K$ //

// 2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in K$ und $\sup T \in T: \max T = \sup T$ //

// $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in K$ und $\inf T \in T: \min T = \inf T$ //

Bew: (.) $\sup A$ existiert nicht in K , sonst wäre $\sup A \in K$ obere Schranke

von A d.h. $x \leq \sup A \quad \forall x \in A \xRightarrow{x > 1} \forall x \in A \quad 1 < \sup A, \quad 0 < \sup A \xRightarrow{(O2), (O3)} 1 < (\sup A)$

+1

$\xRightarrow{\text{Def } A} (\sup A) + 1 \in A$ Widerspruch zu $\sup A$ obere Schranke von A , denn

$\sup A < (\sup A) + 1$

$\max A$ existiert nicht in K , da $\sup A$ nicht existiert in K , wg. S1.3.1 2.)

(..) $\inf A$ existiert und $\inf A = 1$. Bew mit Def von \inf , denn

$\alpha) 1$ ist untere Schranke von A , klar, da $1 < x \quad \forall x \in A$

(insbesondere $1 \leq x \quad \forall x \in A$)

$\beta) 1 \geq \underline{s} \quad \forall$ unteren Schranken \underline{s} von A .

Bew: Annahme: $\exists \underline{s} > 1$ für untere Schranke von $A \xRightarrow{\text{RR}} \exists c \in K: 1 < c < \underline{s}$, insbesondere $c \in A$.

Widerspruch zu \underline{s} untere Schranke von A , da $c < \underline{s} \xRightarrow{\alpha), \beta), \text{Def}}$

$\inf A = 1 \in K$

$\min A$ existiert nicht, da $1 \notin A$ (S1.3.1)

Andere Formulierung:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

Lös: Es gilt $\sup M_1 = \infty$ und $\inf M_1 = 2$, $\min M_1$ existiert nicht.

Bew: $M_1 \neq \emptyset$, da $2 + 1 > 2$, d.h. $2 + 1 \in M_1$. M_1 besitzt keine obere Schranke, denn wenn s eine obere Schranke wäre, dann müsste gelten: $s \geq 2 + 1$ und $s + 1 > 2$ und $s + 1 > s$ Widerspruch $\Rightarrow \sup M_1 = \infty$

2 ist untere Schranke von M_1 . Sei nun $s > 2$. Dann gilt $2 < \frac{2 + s}{2} < s$,

d.h. $\frac{2 + s}{2} < s$ und $\frac{2 + s}{2} \in M_1 \Rightarrow s$ ist keine untere Schranke von $M_1 \Rightarrow$

$\inf M_1 = 2$. Da $2 \notin M_1$ existiert $\min M_1$ nicht.

A1.3.15 $A, B \neq \emptyset, A, B \subset \mathbb{R}$. $\forall a \in A, b \in B$ gelte $a \leq b$. Zeige, $\sup A \leq \inf B$.

Lös: Ann $\sup A > \inf B \Rightarrow \exists a \in A$ mit $a \geq \inf B + \varepsilon/2 \Rightarrow \inf B \leq a - \varepsilon/2 \Rightarrow$

$\exists b \in B$ mit $b \leq (a - \varepsilon/2) + \varepsilon/4 = a - \varepsilon/4 \Rightarrow$ Widerspruch zur Vor $b \geq a$

A1.3.16

Bestimme $\sup X$ und $\inf X$ (mit Bew) für folgende Mengen X und prüfe, ob diese Mengen ein \max oder \min besitzen

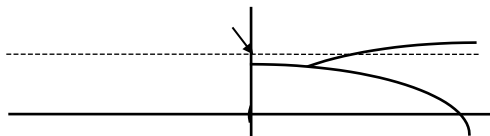
a) $X = \{x : x = \frac{|t|}{1 + |t|}, t \in \mathbb{R}\}$

Lös: $0 \leq |t| < 1 + |t| \Rightarrow 0 \leq \frac{|t|}{1 + |t|} < \frac{|t|}{|t|} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 0$ ist untere Schranke,
 1 ist obere Schranke von X .

- \inf, \min ? Für $t=0$ ist $\frac{|t|}{1 + |t|} = 0 \Rightarrow 0 \in X, 0 = \min X = \inf X$
- \sup ? Annahme $\exists m < 1$ mit $\frac{|t|}{1 + |t|} \leq m \quad \forall t \in \mathbb{R}, 1 - m > 0 \Leftrightarrow$
 $|t| \leq m(1 + |t|) = m + |t|m \Leftrightarrow |t|(1 - m) \leq m \Leftrightarrow |t| \leq \frac{m}{1 - m} \quad \forall t \in \mathbb{R},$
Widerspruch zu \mathbb{R} unbeschränkt $\Rightarrow \forall m : m \geq x : x \in X \Rightarrow m \geq 1 \Rightarrow \sup X = 1$.
- $1 = \max X$? $t \in \mathbb{R} : 1 = \frac{|t|}{1 + |t|} \Leftrightarrow 1 + |t| = |t| \Leftrightarrow 1 = 0!$ falsch $\Rightarrow 1 \notin X \Rightarrow$
 X hat kein \max .

Andere Formulierung:

$$M = \left\{ \frac{|x|}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$$



// **D1.2.2** (405) $K = (K, +, *, <)$ & $T \subset K, T \neq \emptyset$ //
// $\underline{m} = \max T \Leftrightarrow \forall t \in T: t \leq \underline{m}$. $\underline{m} = \min T \Leftrightarrow \forall t \in T: \underline{m} \leq t$ //
// **S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K, T \neq \emptyset, s \in K$ //
// 1.) $\bar{s} = \sup T \Leftrightarrow \alpha) \bar{s}$ ist obere Schranke von T und //
// $\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\bar{s} - \varepsilon$ keine obere Schranke von T //
// $\Leftrightarrow \forall t \in T: t \leq \bar{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \bar{s} - \varepsilon$ //
// 2.) $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in K$ und $\inf T \in T: \min T = \inf T$ //

Lös: Beh $M = [0, 1)$. Damit $\inf M = \min M = 0, \sup M = 1, \exists$ kein $\max M$, denn

$$0 \in M \text{ und } 0 \leq y \quad \forall y \in M \quad \stackrel{\text{D1.2.2}}{\Leftrightarrow} \min M = 0 \Rightarrow \inf M \stackrel{\text{S1.3.1 2.)}}{=} 0.$$

1 ist obere Schranke von M und $1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ ist keine obere
Schranke von $M \stackrel{\text{S1.3.1 1.)}}{\Leftrightarrow} \sup M = 1 \stackrel{\text{S1.3.1 2.)}}{\Leftrightarrow} \underbrace{\quad}_{1 \notin M} \max M$ existiert nicht, da
 $1 \notin M$

Bew: • $M \subset [0, 1)$, sei $y \in M$,

Nebenrechnung: $1 + |x| > |x|, \frac{1}{1 + |x|} < \frac{1}{|x|}, \frac{|x|}{1 + |x|} < \frac{|x|}{|x|}$

d.h. $y = \frac{|x|}{1 + |x|}$ mit $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leq |x| < 1 + |x| \Rightarrow 0 \leq \frac{|x|}{1 + |x|} < \frac{|x|}{|x|} = 1$ falls $x \neq 0$

bzw

$$0 \leq \frac{0}{1 + 0} < 1, \text{ falls } x = 0$$

• $M \supset [0, 1), y \in [0, 1)$, Nebenrechnung: $y = \frac{x}{1 + x} \Leftrightarrow y + xy = x \Leftrightarrow x = \frac{y}{1 - y}$

Definiere $x = \frac{y}{1 - y} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1 + x} = \frac{|x|}{1 + |x|} \Rightarrow y \in M$

Ähnliche Aufgabe

$$M = \left\{ \frac{|x|}{1 + 2|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Es gilt $\min M = \inf M = 0$, $\sup M = 1/2$, \max existiert nicht.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq \frac{|x|}{1 + 2|x|} = \frac{2|x|}{1 + 2|x|} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$0 \in M$ ist untere Schranke $\Rightarrow \min M = 0 = \inf M$

$1/2$ obere Schranke vom $M \Rightarrow$ Sei $s < 1/2$. Setze $t = \frac{s + 1/2}{2}$
 $(\Rightarrow s < t < 1/2)$.

Dann ist $t \in M$, denn für $x > 0$ gilt $t = \frac{x}{1 + 2x} \Leftrightarrow 2t = \frac{1 + 2x - 1}{1 + 2x} \Leftrightarrow$

$$2t = 1 - \frac{1}{1 + 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + 2x} = 1 - 2t \Leftrightarrow 1 + 2x = \frac{1}{1 - 2t} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{1 - 2t}}_{>1} - 1 \right) \Rightarrow$$

s ist also keine obere Schranke $\Rightarrow 1/2 = \sup M$,
 $1/2 \notin M \Rightarrow \max M$ existiert nicht

b) $M = \left\{ \frac{x}{1+x} : x \in \mathbb{R}, x > -1 \right\}$

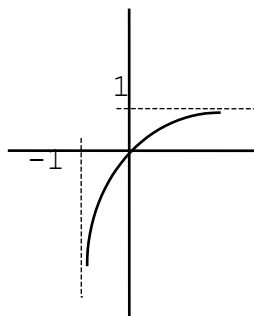
Beh: $M = (-\infty, 1)$, damit $\inf M = -\infty$ d.h. M ist nach unten nicht beschränkt.

\exists kein $\inf M$ und kein $\min M$

$\sup M = 1$. \exists kein $\max M$,

Begründung analog zu a)

Bew: Wir zeigen : $M = (-\infty, 1) = \{y \in \mathbb{R} : y < 1\}$.



- $M \subset (-\infty, 1) : y \in M \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x > -1$ mit $y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y < 1$, d.h. $y \in (-\infty, 1)$,
denn 1. Fall $x=0 \Rightarrow y=0 < 1$

2. Fall $x > 0 \Rightarrow 1+x > x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} < \frac{x}{x} = 1$

3. Fall $x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} < 0 < 1$
 < 0 da $x > -1$

- $M \supset (-\infty, 1] : y \in (-\infty, 1]$, d.h. $y < 1, 1-y > 0, y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y + yx = x \Leftrightarrow$

$$x - yx = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

Setze $x := \frac{y}{1-y} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ und $x > -1 \Rightarrow y \in M$, da $y = \frac{x}{1+x}$,

denn

1. Fall $y \geq 0, x = \frac{y}{1-y} \geq 0 > -1$ wie in Def M gesetzt
 > 0 , da $y < 1$

2. Fall $y < 0, 1-y > -y, x = \frac{y}{1-y} > \frac{y}{-y} = -1 \Rightarrow y \in M$, da $y = \frac{x}{1+x}$

$*1-y > -y \Rightarrow \frac{1}{1-y} < \frac{1}{-y} \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} > \frac{y}{-y} = -1$

// **S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K, T \neq \emptyset, s \in K$ //

// 2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in K$ und $\sup T \in T : \max T = \sup T$ //

// $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in K$ und $\inf T \in T: \min T = \inf T //$

Aus $M = (-\infty, 1)$ folgt sofort die Beh., denn

(.) Wäre M nach unten beschränkt, so $\exists k \in \mathbb{R}: k \neq y, \forall y \in M = (-\infty, 1) \Rightarrow k \leq 1 \Rightarrow k-1 < 1$, also $k-1 \in M$ Widerspruch zu k untere Schranke ($k-1 < k$).

(..) $\min M$ existiert nicht, da $\inf M$ in \mathbb{R} nicht existiert (S1.3.1)

(...) $\sup M = 1$

(....) $\max M < x$ nicht, da $1 \notin M$ (und S 1.3.1)

Andere Formulierung:

$$X = \left\{ x: x = \frac{t}{1+t}, t > -1 \right\}$$

Lös: Für $-1 < t < 0 \Rightarrow \frac{t}{1+t} < 0$

Für $t > 0 \xrightarrow{\text{wie a)}} x = \{0 \leq x < 1\}$ und $\sup X = 1$, es existiert kein max.

Beh: X ist nach unten unbeschränkt.

Bew: Annahme $\exists K \in \mathbb{R}$ (oBdA $K < 1$) mit $x \geq K \forall x \in X \stackrel{\text{Def Menge}}{\Leftrightarrow} \frac{t}{1+t} \geq K \forall t > -1$

$$\Leftrightarrow t \frac{1-K}{1+t} \geq K \Leftrightarrow t \geq \frac{K}{1-K} > -1 \text{ da } K > K-1 \text{ bzw } \frac{K}{K-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{K}{1-K} > -1$$

$$\Leftrightarrow \exists t := 1/2 \left(\underbrace{\frac{K}{1-K}}_{>1} - 1 \right), \frac{K}{1-K} > t > -1 \Rightarrow \frac{K}{1-K} > t > -1 \text{ Widerspruch}$$

*da $t > -1$, d.h. auch $t > \frac{K}{1-K} \Rightarrow$ Annahme falsch \Rightarrow Beh falsch

Andere Formulierung:

$$M = \left\{ \frac{x}{1+x}, x \in \mathbb{R}, x > -1 \right\}$$

Lös: zu beweisen $\inf M = -\infty$, d.h. nicht nach unten beschränkt \Rightarrow

$\inf M$ in \mathbb{R} nicht existent

\min, \max existiert nicht, $\sup M = 1$

$M = (-\infty, 1) = \{y \in \mathbb{R} : y < 1\}$ weil

$M \subset (-\infty, 1)$: $y \in M \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x > -1$ mit $y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y < 1$, d.h. $y \in (-\infty, 1)$ denn

1. Fall: $x = 0, 1+x > x \Rightarrow y = 0 < 1$

2. Fall: $x > 0, 1+x > x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{x}{x} = 1$

3. Fall: $x < 0$: $y = \underbrace{x}_{<0} * \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0} < 0 < 1$

$M \supset (-\infty, 1)$: $y \in (-\infty, 1)$, d.h. $y < 1$. Setze $x = \frac{y}{1-y}$ (vgl oben) \Rightarrow

$x \in \mathbb{R}$ & $x > -1$, denn 1. Fall: $y \geq 0 \Rightarrow x = \underbrace{y}_{\geq 0} * \underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0} \geq 0 > -1$

2. Fall: $y < 0$: $1-y > -y \Rightarrow \frac{1}{1-y} < \frac{1}{-y} \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} > = \frac{y}{-y} = -1$

$\Rightarrow y \in M$, da $y = \frac{x}{1+x}$

$M = (-\infty, 1) \Rightarrow$ zu Beweisendes da

(.) Wäre M nach unten beschränkt $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}: K \neq y \in M = (-\infty, 1) \Rightarrow K < 1 \Rightarrow K-1 < 1 \Rightarrow K-1 \in M \Rightarrow$ Widerspruch zu K ist untere Schranke ($K=1 < K$)

(..) \min existiert nicht da $\inf M$ in \mathbb{R} nicht existiert.

(...) $\sup M = 1$ Bew siehe a)

(....) $\max M$ existiert nicht, da $1 \notin M$

$$c) M = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{2}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

// **D1.2.2 (405)** $K = (K, +, *, <)$ & $T \subset K, T \neq \emptyset$. $\bar{m} = \max T \Leftrightarrow \forall t \in T: t \leq \bar{m}$ //

// **S1.3.1 (501) Vor.:** K angeordnet $T \subset K, T \neq \emptyset, s \in K$ //

// 1.) $\underline{s} \inf T \Leftrightarrow \alpha) \underline{s}$ ist untere Schranke von T und //

// $\beta) \forall \varepsilon > 0$ ist $\underline{s} + \varepsilon$ keine untere Schranke von T //

// $\Leftrightarrow \forall t \in T: t \geq \underline{s}$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon < \underline{s} + \varepsilon$ //

// 2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in K$ und $\sup T \in T: \max T = \sup T$ //

Beh: Aus Vermutung $\inf M = 0$, $\min M$ existiert nicht, $\sup M = \max M = 3$

$$\text{Bew: } (.) \frac{1}{n} + \frac{2}{m} \underset{n \geq 1}{\leq} \frac{1}{1} + \frac{2}{m} \underset{m \geq 1}{\leq} 1 + \frac{2}{1} = 3 \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$t \leq 3 \quad \forall t \in M \text{ und } 3 \in M \text{ (mit } m=n=1) \stackrel{\text{D1.2.2}}{\Leftrightarrow} \max M = 3 \stackrel{\text{S1.3.1 2.)}}{\Leftrightarrow} \sup M = 3$$

(..) Wegen $\frac{1}{n} + \frac{2}{m} > 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ ist 0 untere Schranke von M
 $> 0 \quad > 0$

Zwischenbetrachtung: $\forall \varepsilon > 0 \exists t^\varepsilon \in M$ mit $t^\varepsilon < \varepsilon$?

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ bel fest \mathbb{N} ist unbeschränkt \Rightarrow

$$\exists \underbrace{n_0, m_0}_{\text{von } \varepsilon \text{ abhängig}} \in \mathbb{N}: n_0 > 2/\varepsilon, m_0 > 2 \cdot 2/\varepsilon.$$

$$\text{Setze } t^\varepsilon := \frac{1}{n_0} + \frac{2}{m_0} \Rightarrow t^\varepsilon \in M \text{ und } t^\varepsilon < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Aus Zwischenbeh $\stackrel{\text{S1.3.1 1.)}}{\Leftrightarrow} \inf M = 0 \quad \stackrel{\text{O} \notin M}{\Leftrightarrow} \min M$ existiert nicht
 $\stackrel{\text{S1.3.1 2.)}}{\Leftrightarrow}$

$$d) M = \{1\} \cup \left\{ \frac{n-m}{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Lös: Es gilt $\frac{n-m}{n+m} < \frac{n}{n+m} < 1$, 1 obere Schranke von M und

$$\frac{n-m}{n+m} > \frac{-m}{n+m} > -1, -1 \text{ untere Schranke von } M.$$

Wegen $1 \in M$ folgt $1 = \max M = \sup M$.

Bleibt zu zeigen: $-1 = \inf M$.

Da -1 untere Schranke, genügt es, zu zeigen, dass $t \in M$ mit $t < -1 + \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists s > -1 + \varepsilon. \text{ Andererseits gilt } \frac{1-m-1+1}{1+m} < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{1+m} - 1 < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < 1+m \Leftrightarrow m > \frac{2}{\varepsilon} - 1. \text{ Wähle hier ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m > \frac{2}{\varepsilon}$$

(existiert, da \mathbb{N} nicht beschränkt). Dann gilt $\frac{1-m}{1+m} \in M$ und $\frac{1-m}{1+m} < -1 + \varepsilon$

$\Rightarrow -1 = \inf M$ und $\min M$ existiert nicht, denn $-1 \notin M$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x-b)(x-c) < 0\}$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$.

Lös: Es gilt $A = (x-a)(x-b)(x-c) = 0$ für $x \in \{a, b, c\}$. Da $a < b < c$ ist, gilt $(x-a)(x-b)(x-c) < 0$, wenn $x \in (-\infty, a) \cup (b, c)$ und $x \in \{a, b\} \cup \{b, \infty\} \Rightarrow$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (x-a)(x-b)(x-c) < 0\} = (-\infty, a) \cup (b, c) \Rightarrow$$

A ist nicht nach unten beschränkt, $\inf A = -\infty$ und $\sup A = c$, denn

c ist obere Schranke von A und für $\varepsilon > 0$ existiert

$d \in (b, c)$ mit $d > c - \varepsilon \Rightarrow \max A$ existiert nicht, denn $c \notin A$.

S1.3.2 (515)

Vor: Sei $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Beh: \exists genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$

($y =: \sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x)

// **D1.3.2** (504) $(K, +, \cdot, <)$ heißt vollständig (bezüglich $<$): \Leftrightarrow //
// $\forall T \subset K, T \neq \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists \sup T \in K$. Ein angeordneter, //
// vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der reellen
// Zahlen \mathbb{R} //

Bew: Z.z. (.) Existenz und (..) Eindeutigkeit, oBdA $x > 0$

(.) Betrachte $T := \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ und } y^2 \leq x\} \subset \mathbb{R}$ d.h. alle Axiome benutzbar.
 $T \neq \emptyset$ (da $0 \in T$) und beschränkt: untere Schranke 0, obere Schranke

$x+1$ (denn $y > x+1 \xRightarrow{y \geq 0} y^2 > (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 > x \Rightarrow T$ beschränkt $\neq \emptyset$)

$\xRightarrow{\text{D1.3.2}}$ $\sup T$ existiert ($0 \leq y \leq x+1$)

Z.z. $y^2 = x$. Lösungsweg: $y^2 > x$: $y^2 < x$:

Annahme $y^2 > x$: Setze $\varepsilon = \frac{y^2 - x}{2y} > 0$ (siehe oben),

Betrachte $(y - \varepsilon)^2 = (y - \frac{y^2 - x}{2y})^2 = y^2 - 2\varepsilon y + \varepsilon^2 > y^2 - 2\varepsilon y = x$ d.h. $y - \varepsilon$ ist

obere Schranke von $T \Rightarrow$ Widerspruch zur Def von y , also ist $y^2 \leq x$

Annahme $y^2 < x$

$\varepsilon = \frac{x - y^2}{2y + 1} > 0$, (oBdA $\varepsilon \leq 1 \Rightarrow$ sonst $\frac{x - y^2}{2y + 1} > 1 \Rightarrow x - y^2 > 2y + 1 \Rightarrow$

$x > y^2 + 2y + 1$

$\Rightarrow x > (y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$ Widerspruch, siehe oben)

$(y + \varepsilon)^2 = y^2 + \varepsilon(2y + \frac{\varepsilon}{<1 \leq x+1}) \leq y^2 + \varepsilon(2y + 1) = x \Rightarrow (y + \varepsilon)^2 \leq x \Rightarrow (y + \varepsilon) \in T \dots$

$y + \varepsilon \in T$ Widerspruch zu y ist obere Schranke von $T \xRightarrow{(O1)} y^2 = x$

// **D1.2.1** (400) $(K, +, \cdot)$ angeordnet $\Leftrightarrow \exists$ auf K $R := <$, Anordnungsaxiome: //

// (O1) $\forall a, b \in K$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften: //

// $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ //

(..) Eindeutigkeit: Annahme $\exists y \neq z \in \mathbb{R}, y^2 = z^2 = x$

$\alpha) y < z, y^2 < yz < zz = z^2$ Widerspruch

$\beta) y > z, y^2 > yz > zz = z^2$ Widerspruch \Rightarrow Eindeutigkeit

.. $0 < y < z \Rightarrow y^2 < yz < z^2$

Bem:

1.) Sei $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$, dann ist $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch $x \mapsto f(x) = x^2$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion ($0 \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1^2 \leq x_2^2$)
injektiv $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ $x \mapsto \sqrt{x}$
 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ ist bij, d.h. \exists Umkehrfunktion $f^{-1}: (y) = \sqrt{y}$
Quadratwurzelfunktion

2.) $\alpha) a, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Bew: $\sqrt{a}, \sqrt{b} \geq 0 \quad (\sqrt{a} \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \sqrt{b}) (\sqrt{a} \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab$
Wegen der Eindeutigkeit der $\sqrt{\quad} \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\beta) 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

Bew: Annahme $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq 0 \Rightarrow a \geq b$ Widerspruch

$\gamma) \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = |a|$

Bew: da $a^2 = (-a)^2 \geq 0$, $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$, $a < 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a \Rightarrow$
 $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = |a|$

3.) Die Funktion $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv,
d.h. \exists Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ (Wurzelfunktion)

D1.3.4 Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, heißt Metrik auf X , wenn für beliebige $x, y, z \in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:

- 1.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2.) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- 3.) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

S1.3.3 Positive Definitheit

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow d(x, y) \geq 0$

Bew: $0 = \frac{1}{2} d(x, x) \stackrel{D1.3.4.3.)}{\leq} \frac{1}{2} (d(x, y) + d(y, x)) \stackrel{D1.3.4.2.)}{=} \frac{1}{2} (d(x, y) + d(x, y)) = d(x, y) \Rightarrow d(x, y) \geq 0$

D1.3.5 (516)

(X, d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. (Manche Autoren fordern zusätzlich, dass $X \neq \emptyset$.)

In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.)

Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.