# 1.9(1100) Polynome, rationale Funktionen

Polynome als formale Ausdrucke und als Abbildungen

Polynomabbildung $z \mapsto a_0+a_1z+...+a_nz^n$

Betrachtung Körper $K=F_2=\{0,1\}$; $1+x=1+x^2$ in $F_2$ wie folgt; Abb gleich!!!

| x | $x \mapsto 1+x$ | $x \mapsto 1+x^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

Also kann keine höchste Potenz angegeben werden.

Addition und Multiplikation zu Polynomen sind erklärt, aber es gibt z.B. zu $x \mapsto x^2$ kein Inverses, erfüllen also nicht alle Körperaxiome. Man spricht von einem Ring, in dem es nicht für alle Elemente ein Inverses gibt

Deshalb Polynome als formale Ausdrucke

**D1.9.0** Polynom über einen Körper ist ein formaler Ausdruck
$P(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$, $a_j \in K$, $j=0,1,2,…,n$

**D1.9.0.1** • Addition

$P(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$, $a_j \in K$, $j=0,1,2,…,n$

$Q(z)=b_0+b_1z+...+b_nz^n$, $a_j \in K$, $j=0,1,2,…,n$

$(P+Q)(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z+...+(a_n+b_n)z^n$,

gewisse $a_j, b_j \in K$, können 0 sein

• Multiplikation

$(P*Q)(z)=(a_0+a_1z+...+a_nz^n)*(b_0+b_1z+...+b_mz^m)=$

$$(a_0*b_0)+(a_1*b_0+a_0*b_1)z+(a_2*b_0+a_1*b_1+a_0*b_2)z^2+...+[\sum_{j=0}^{k} a_j*b_{k-j}]z^k$$

$k=0,1,…,m+n$

Schreibweisen:

Menge der Polynome $K(z)$: $\{\underbrace{a}_{Abbildungen} : N_0 \to \underbrace{K}_{Körper}$ mit $a(n)=0$ für fast alle $n\}$

(fast alle: für alle bis auf $\infty$ viele n… endlich viele n sind $\neq 0$)

$a(n)=a_n$, $\underbrace{a}_{Abbildungen} = (a_0, a_1, …, a_m, 0, 0, …)$

Definitionen in dieser Schreibweise:

Addition: $(a_0,a_1,…)+(b_0,b_1,…)=(a_0+b_0,a_1+b_1,…)$

Multiplikation: $(a_0,a_1,…)*(b_0,b_1,…)=(c_0,c_1,…)$, $c_k=\sum_{j=0}^{k} a_j*b_{k-j}$

Körperaxiome erfüllt? Nein: denn zu (0,1,0..) existiert kein Inverses

Man spricht von einem Ring, hier Polynomring, in dem es nicht für alle Elemente ein Inverses gibt (siehe p19_anlage)

z.B.: $Z_0$ ist auch ein Ring da kein a mit $a \otimes a^{-1} \neq 1$

Polynomabbildungen

**D1.9.1**(1100) Seien $n \in N_0$, $a_0,a_1,a_2...,a_k \in K$, $z^0=1$, $0^0=1$ gegeben, dann heißt

1.) Die Funktion $P: K \to K$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist ein Polynom in z mit Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 ..., a_n$ und Grad n, falls $a_n \neq 0$ ($n = grad(P)$ oder $n = \gamma(P)$). Polynome $\gamma(P) = 0$ sind konstant $P(z) = c \neq 0$, $c \in C$, aber nicht identisch gleich 0, solche vom Grad n=1 bzw n=2 heißen lineare bzw quadratische Funktionen.
Die Menge aller Polynome (Variable z) mit Koeffizienten in K wird mit $K[z]$ bezeichnet, die Teilmenge der Polynome vom Grade höchstens gleich n sei $K_n[z]$ für $n \in N_0$.

Beachte: $grad(Q(z)) = 0$ falls $Q(z) \equiv a_0 \neq 0$, $f: z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \ \forall z \Rightarrow f \equiv 0$

2.) Ein $z_0 \in K$ ist Nullstelle von P: $\Leftrightarrow P(z_0) = 0$, $P(z) \neq 0$
Wir nennen $z_0$ eine Nullstelle m-ter Ordnung, oder Nullstelle der Vielfachheit m von P, wenn es ein $Q \in K[z]$ gibt, so dass $P(z) = (z - z_0)^m Q(z) \ \forall z \in K$ gilt, und $Q(z_0) \neq 0$.
Bem: Das Polynom $x^2+1$ hat offenbar in R keine Nullstelle, in C dagegen besitzt es 2 Nullstellen, nämlich i und -i. Wir werden später beweisen, daß jedes nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle in C besitzt.

3.) Mit Polynomen $P, Q: K \to K$ ist die Funktion
$R: K \setminus \{\text{Nullstellen von } Q\} \to K$, $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion.

Andere Formulierungen:
Sind $P, Q \in K[z]$ und ist Q nicht das Nullpolynom, so ist der Quotient P/Q überall dort definiert, wo $Q(z) \neq 0$ ist. Wir nennen P/Q eine rationale Funktion und die Menge der z mit $Q(z) \neq 0$ heißt ihr natürlicher Definitionsbereich. Die Menge der rationalen Funktionen sei mit $K(z)$ bezeichnet.

4.) $P \equiv 0$ (d.h. $P(z) = 0 \ \forall z \in K$) heißt Nullpolynom mit $\gamma(P) := -\infty$ (damit Bem immer richtig)
Falls alle $a_k = 0$ sind folgt $P(x) \equiv 0$ und wir nennen dieses Polynom das Nullpolynom oder die Nullfunktion.
Bem: $\gamma(P*Q) = \gamma(P) + \gamma(Q)$, falls $P \equiv 0$ oder $Q \equiv 0$ ist $\gamma(P) + \gamma(Q) = -\infty$

5.) Sei $P \in K[x]$ für ein $n \in N$, und seien $x_1, ..., x_\mu \in K$ verschiedene Nullstellen von P der Vielfachheiten $m_1, ..., m_\mu$. Dann sagen wir:
P hat $m = \sum_{j=1}^{\mu} m_j$ Nullstellen in K (wenn wir entsprechend der Vielfachheit zählen, was normalerweise der Fall ist). Die Aussage, dass P höchstens n Nullstellen haben kann, ist also zu interpretieren als $\sum_{j=1}^{\mu} m_j \leq n$.

6.) K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom $\neq 0$ eine Nullstelle hat

Bem: Jeder Körper hat einen Erweiterungskörper $\overline{K}$ , $K\subset\overline{K}$ , der algebraisch abgeschlossen ist.
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beachte, dass die Bezeichnung der Unbestimmten völlig willkürlich ist. Wir werden daher im Fall $K=\mathbb{C}$ oft $\mathbb{C}[z]$ bzw $\mathbb{C}(z)$ für die Menge der Polynome bzw rationalen Funktionen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ schreiben.

Bem: $\gamma(P*Q))=\gamma(P)*\gamma(Q)$;
$\gamma(P+Q))\le\max\{\gamma(P),\gamma(Q)\}$, (< falls sich die höchsten Glieder aufheben)

Abbildung
$\phi$: $f\in K[z]\mapsto$ Die Abbildung $\alpha\mapsto f(\alpha)$, $\alpha\in K$,
$K[z]\mapsto$ Abbildung(K,K) ???...Im allgemeinen nicht injektiv, aber

**P1.9.1** $\phi$: $K[z]\mapsto$ Abbildung(K,K) ist injektiv, falls K unendlich viele Elemente hat

Bew: Seien $f,g\in K[z]$, $\phi(f)=\phi(g)$, $|K|=\infty \Rightarrow \phi(f-g)=0$ Nullabbildung,
zu zeigen: $f-g=0 \Rightarrow$ f-g hat $\infty$ viele Nullstellen.
Es gilt aber |{Nullstellen eines Polynoms h}|$\le$ grad h, denn sind $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ Nullstellen $\Rightarrow h(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)\underbrace{r(x)}_{Polynom} \Rightarrow \gamma(h)\ge n$ (..$\infty$) $\Rightarrow$

$f-g=0$

**S1.9.0** Addition von Polynomen (Gewisse $a_k,b_k$ können auch 0 sein)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_kz^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n} b_kz^k\right)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z^1+\dots(a_n+b_n)z^n.$$

Multiplikation von Polynomen

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_kz^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_kz^k\right)=(a_0+a_1z^1+\dots+a_nz^n)(b_0+b_1z^1+\dots+b_nz^n)=$$

$$a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)z^1+\dots+\left[\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}\right]z^k+\dots+\left[\sum_{j=0}^{n} a_jb_{k-j}\right]z^n$$

Bew: siehe A1.9.2

**A1.9.1** Gegeben sei ein Polynom $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit $c_n\neq 0$.

Es sei $a\in\mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(a)=0$.

Beweise, dass $|a|<\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n}|c_k|$.

Bew: $|a|<1$: $|a|<1\le \frac{|c_0|+|c_1|+\ldots|c_n|}{|c_n|} = \frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n} |c_k|$.

$\# \quad \frac{|c_0|+|c_1|+\ldots|c_n|}{|c_n|} = \frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n} |c_k| \ge 1 \underbrace{\Rightarrow}_{|a|<1}$ weiter wie oben

$|a|\ge 1$: $f(a)=0 \Rightarrow c_0+c_1a+\ldots c_{n-1}a^{n-1}+c_na^n=0 \Rightarrow$

$$c_na^n=-c_0-c_1a-\ldots c_{n-1}a^{n-1}=-\sum_{k=0}^{n-1} c_ka^k \Rightarrow$$

$$|c_n||a|^n=|\sum_{k=0}^{n-1} c_ka^k|\le\sum_{k=0}^{n-1}|c_k||a^k| \Rightarrow$$

$$|c_n||a|^n * \frac{1}{|c_n||a|^{n-1}} \le \sum_{k=0}^{n-1}|c_k||a^k| * \frac{1}{|c_n||a|^{n-1}} \Rightarrow$$

$$|a|\le\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k||a|^{k-(n-1)} \underbrace{\ge}_{|a|\ge 1,\ k-(n-1)\le 0} \frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|<\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n}|c_k|$$

**A1.9.2**

**a)** Es seien $n,m\in\mathbb{N}$, $a_0,...,a_n,b_0,...,b_m\in\mathbb{C}$ mit $a_n,b_m\neq 0$. Zeige, dass für die Polynome $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ gilt:

$P\cdot Q$ ist ein Polynom vom Grad $n+m$, genauer:

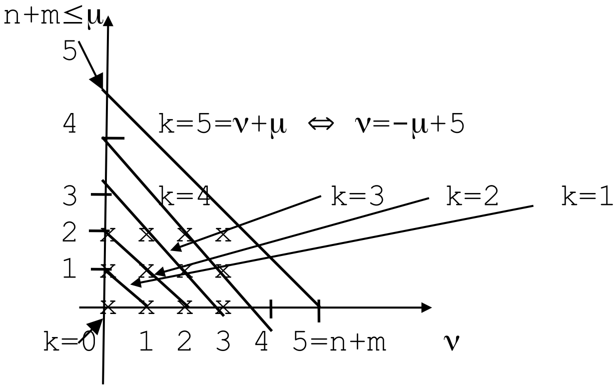
$P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$ mit $c_k=\sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu$, $k=0,...,n+m$, wobei

$a_k=0\ \forall\ k>n$ und $b_k=0\ \forall\ k>m$ gesetzt sei.

Bew: $P(z)*Q(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu \underbrace{z^\nu z^m}_{z^{\nu+m}} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{\substack{0\le\nu\le n+m\\0\le\mu\le n+m\\\nu+\mu=k}} a_\nu b_\mu z^k=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k \Rightarrow P*Q$ ist ein Polynom.

beachte $a_\nu=0$ für $\nu>n$, $b_\mu=0$ für $\mu>m$. Rechts stehen mehr Summanden als links, aber Summe ist gleich.

Genauere Erläuterung der Umsummation am Bsp $n=3$, $m=2$,




| m \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $a_0b_5$ | | | | | |
| | | $b_3...b_5=0$ | | | | |
| 4 | $a_0b_4$ | $a_1b_4$ | | | | |
| | | | | | $a_4...a_5=0$ | |
| 3 | $a_0b_3$ | $a_1b_3$ | $a_2b_3$ | | | |
| 2 | $a_0b_2$ | $a_1b_2$ | $a_2b_2$ | $a_3b_2$ | | |
| 1 | $a_0b_1$ | $a_1b_1$ | $a_2b_1$ | $a_3b_1$ | $a_4b_1$ | |
| 0 | $a_0b_0$ | $a_1b_0$ | $a_2b_0$ | $a_3b_0$ | $a_4b_0$ | $a_5b_0$ |
| k= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Bei der linken Summe wird über alle Gitterpunkte im Rechteck $0\le\nu\le n$, $0\le\mu\le m$ summiert, während bei der rechten Summe über alle Gitterpunkte im Dreieck $0\le\nu+\mu\le n+m$ summiert wird. Man beachte, dass in den Punkten des Dreiecks ohne das Rechteck (diese Punkte hat man hinzugenommen) der Wert $a_\nu b_\mu=0$ ist!

Bem: $c_k$ läßt sich auch in der Form $c_k=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}$ schreiben.

$a_n\neq 0,\ b_m\neq 0 \Rightarrow c_{m+n}=\sum_{\nu=0}^{n+m} \underbrace{a_\nu}_{=0\text{ for }\nu>n} * \underbrace{b_{n+m-\nu}}_{=0\text{ für }n+m-\nu>m\ \ d.h.\ \nu<n} = a_n b_m\neq 0$

(alle Summanden $=0$ für $\nu>n$). Also $\operatorname{grad}(PQ)=n+m$

#Im Bsp oben $n=3$, $m=2$

#$c_0=\sum_{\nu=0}^{0} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{0-0}$, $c_1=\sum_{\nu=0}^{1} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{1-0}+a_1b_{1-1}$,

#$c_2=\sum_{\nu=0}^{2} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{2-0}+a_1b_{2-1}+a_2b_{2-2}$ ...

#$c_5=\sum_{\nu=0}^{5} a_\nu b_{k-\nu}=a_0\underbrace{b_{5-0}}_{=0\ da\ 5>2}+a_1\underbrace{b_{5-1}}_{=0\ da\ 4>2}+a_2\underbrace{b_{5-2}}_{=0\ da\ 3>2}+a_3b_{5-3}+\underbrace{a_4}_{=0\ da\ 4>3}b_{5-4}+\underbrace{a_5}_{=0\ da\ 5>3}b_{5-5}=a_3b_2$

#Im Bsp $n=3$, $m=2$: für $k=4$ ist

#$c_4=\sum_{\nu=0}^{4} a_\nu b_{k-\nu}=a_0\overbrace{b_{\mu=4>m=2}}^{=0}+a_1\overbrace{b_{\mu=3>m=2}}^{=0}+a_2b_2+a_3b_1+\overbrace{a_{\nu=3>n=3}}^{=0}b_0=a_2b_2+a_3b_1$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, Hinweis: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

//**S1.7.4** *(906)* $\alpha\in C$, $n,m,k\in N_0$, $j\in N$:// $\binom{2n}{k}$ $\underbrace{\binom{n}{k}}_{a_k}$

//1.) $\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}$ //

//3.) $\binom{\alpha}{n}=\binom{n}{n-m} \underbrace{=}_{2.)} \frac{n!}{(n-m)!(n-m-n)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \underbrace{=}_{2.)} \binom{n}{m}$ *falls n≥m//*

//5.) $\binom{\alpha}{j}+\binom{\alpha}{j-1}=\binom{\alpha+1}{j}$ // $\binom{n}{k-\nu}$ $\underbrace{\binom{n}{n-\nu}}_{\underset{S1.7.4\ 3.)}{=}\binom{n}{\nu}}$

//6.) $\forall\ a,b,z\in C \wedge n\in N_0$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$

Bew: $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k \underbrace{=}_{Binominalsatz} (x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n \underbrace{=}_{Binominalsatz} [\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{a_k} x^k)][\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{b_k}x^k)] \underbrace{=}_{A1.9.2}$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, $\sum_{k=0}^{2n}[\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}x^k\ \forall\ x\in C \underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.4} \binom{2n}{n}=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}\ \forall\ k=0,1,$ …2n $\underbrace{\Rightarrow}_{k=n}$

$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\underbrace{\binom{n}{n-\nu}}_{\underset{S1.7.4\ 3.)}{=}\binom{n}{\nu}}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

**S1.9.1**(1103)

Vor:Sei P ein Polynom, $\gamma(P)\geq 1$, $n\in N_0$

1.)Ist $z_0\in C$ eine Nullstelle von $P(z)$, so ∃ ein Polynom $Q(z)$ mit $\gamma(Q)=n-1$ sodass gilt $P(z)=(z-z_0)Q(z)\ \forall\ z\in C$

//**S1.7.2** *(903)* $a,b\in C$, $n\in N_0$: 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^kb^{n-k}$// $\underbrace{=}_{\substack{0\le\nu\le\ell\\0\le\ell\le n-1}}$

Bew: $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_kz^k$, $n\geq 1$, $P(z_0)=0$, $z_0\in C \Rightarrow P(z)=P(z)-P(z_0)=$

$$\sum_{k=0}^{n} a_kz^k-\sum_{k=0}^{n} a_kz_0^{k} \underbrace{=}_{a_0z^0-a_0z_0^0=0} \sum_{k=1}^{n} a_k(z^k-z_0^k) \underbrace{=}_{k=\ell+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{+1}(z^{+1}-z_0^{+1}) \underbrace{=}_{S1.7.2\ 2.)}$$

$$(z-z_0)\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{+1}\sum_{\nu=0}^{\ell} z^\nu z_0^{-\nu} \underbrace{=}_{\substack{0\le\nu\le\ell\\0\le\ell\le n-1}} (z-z_0)\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{+1}\sum_{\ell=\nu}^{n-1} z^\nu z_0^{-\nu}=$$

$$(z-z_0)\sum_{\nu=0}^{n-1} z^\nu\left(\sum_{l=\nu}^{n-1} a_{l+1}z^{l-\nu}\right)=(z-z_0)Q(z)$$

$\left(\sum_{l=\nu}^{n-1} a_{l+1}z^{l-\nu}\right)=b_\nu$, $\nu=0,...,\nu-1$,

wobei $b_{n-1}=a_nz_0^{n-1-(n-1)=0}\neq 0$, da $\gamma(P)=n$

2.) $P(z)$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$, außer wenn es das Nullpolynom ist.

Bem: n, nicht n+1 entsprechend 0,1,2,…n!

Bew: $A_{(n)}$: $P$ mit $\gamma(P)=n\in\mathbb{N}_0$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

$n=0$: $A_{(0)}$: $P(z)\equiv a_0\neq 0$, $\gamma(P)=0$ #0 Nullstellen

$n\to n+1$: Sei $\gamma(P)=n+1$

1.Fall $P(z)\neq 0\ \forall\ z\in\mathbb{C} \Rightarrow A_{(n+1)}$

2.Fall $\exists\ z_0\in\mathbb{C}\ P(z_0)=0 \underbrace{\Rightarrow}_{1.)} P(z)=(z-z_0)Q(z)$,

I.H $\gamma(Q)=n \Rightarrow Q$ hat höchstens n Nullstellen

$P(z_1)=0 \Leftrightarrow (z_1-z_0)=0$ oder $Q(z_1)=0 \Rightarrow P(z)$ hat höchstens n+1 Nullstellen.

($A_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)}$ wahr)

**S1.9.1'** (1104) Für ein $P(x)=\sum_0^n a_k x^k\in\mathbb{K}[x]$ (Menge aller Polynome) und beliebiges $x_0\in\mathbb{K}$ ist $P(x+x_0)=\sum_0^n b_j x^j$, mit $b_j=\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j}\ \forall\ j=0,...n$; also ist $P(x+x_0)$ wieder in $\mathbb{K}[x]$ und hat den gleichen Grad wie P

Bew: Es ist nach der binomischen Formel $(x+x_0)^k=\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} x^j,\ \forall\ k\in\mathbb{N}_0$,

also folgt durch Vertauschung der Summationreihenfolge

$$\sum_{k=0}^n a_k(x+x_0)^k \underbrace{=}_{Bin\ Formel} \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} x^j \underbrace{=}_{0\le j\le k\le n} \sum_{j=0}^n \underbrace{x^j}_{unabh\ von\ k} \underbrace{\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j}}_{b_j} = \sum_{j=0}^n b_j x^j,$$

und daraus ergibt sich die Behauptung.

**S1.9.1''**(1105)Sei $P\in K[x]$ mit $\gamma(P)=n$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Dann hat jede Nullstelle $x_0$ von P eine eindeutig bestimmte Ordnung m, und $m\leq n$.

*//**S1.9.1**(1103) Vor:Sei P ein Polynom vom grad $n\geq 1.n\in N_0$//*
*//Beh:1.)$z_0\in C$ Nullst von P(z), so ∃ ein Polynom Q(z) mit grad(Q)=n-1/*
*// sodaß gilt $P(z)=(z-z_0)Q(z)$ ∀ $z\in C$//*

Bew:Gesucht $b_k$ für $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n} b_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-x_0)^{k-j}x^j=$

$$\sum_{j=0}^{n} x^j\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}\Rightarrow a_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j},\quad 0\leq j\leq n$$

$j=n$: $a_n=\sum_{k=n}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}=\binom{n}{n}b_n(-x_0)^{n-n}=b_n$

$j=n-1$: $a_{n-1}=\sum_{k=n-1}^{n}\binom{k}{n-1}b_k(-x_0)^{k-(n-1)}=\binom{n-1}{n-1}b_{n-1}(-x_0)^{n-1-(n-1)}+\binom{n}{n-1}b_n(-x_0)^{n-(n-1)}=$

$$=b_{n-1}+n\overbrace{b_n}^{a_n}(-x_0)^{n-(n-1)}\Rightarrow b_{n-1}=a_{n-1}-na_n(-x_0)\ \text{usw}\qquad\binom{k}{j}$$

Allg: $a_j=\binom{j}{j}b_j(-x_0)^{j-j}+\sum_{k=j+1}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}=b_j+\binom{k}{j}\sum_{k=\underbrace{j+1}_{>j}}^{n}b_k(-x_0)^{k-j}\Rightarrow$

Alle $b_j$ lassen sich ausrechnen.

Falls $x_0$ Nullstelle: $0=P(x_0)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x_0-x_0)^k\underbrace{=}_{0^0=1,0^k=0}b_0\Rightarrow$

m mindestens 1 in $P(x)=\sum_{k=m}^{n}b_k(x-x_0)^k=(x-x_0)^mQ(x)$

Nach S1.9.1' können wir P in der Form $P(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k$ schreiben, mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $b_k=b_k(x_0)\in K$. Ist $x_0$ Nullstelle, so ist $m=\min\{k: b_k\neq 0\}\geq 1$, und $P(x)\underbrace{=}_{S1.9.1}(x-x_0)^mQ(x)$ mit $Q(x_0)\neq 0$. Das bedeutet, daß $x_0$ Nullstelle der Ordnung $m\leq n$ ist.

Die Eindeutigkeit der Nullstellenordnung ist leicht zu zeigen.

**S1.9.1'''**(1106) Divisionssatz (Division mit Rest)

Vor: Polynome $S(z) \models 0$ ,$P(z)$ beliebig.

Beh: $\exists$ eindeutig bestimmte Polynome $Q(z)$ und $R(z)$:$P=Q*S+R$, $\gamma(R)<\gamma(S)$ S.

Bew: $\overline{Q}$ Menge aller Polynome, $M:=P-\overline{Q}\,S \Rightarrow \exists$ R: $\gamma(R)=\min\{\gamma(M)\}$

Annahme $\gamma(R)\geq\gamma(S) \Rightarrow \exists\ Q_1(z): \frac{a_{R_{\deg R}}}{a_{S_{\deg S}}}\, x^{\gamma(R)-\gamma(S)}$, $a_{R_k}$ , $a_{S_k}$ Koeff von S,R $\Rightarrow$

$R_1(z):=R-Q_1S=P-\underbrace{(Q+Q_1)}_{\in\overline{Q}}\,S$, $R_1\in M$: $\gamma(R_1)<\gamma(R)$, da

$$\gamma(R_1):=\gamma\left(\left(a_{R_0}+\ldots a_{R_{\deg R}}\ (z)^{\gamma(R)}\right)-\frac{a_{R_{\deg R}}}{a_{S_{\deg S}}}\, z^{\gamma(R)-\gamma(S)}\left(a_{S_0}+\ldots a_{S_{\deg S}}\ (z)^{\gamma(S)}\right)\right)=$$

$$\gamma\left(a_{R_0}\pm..+a_{R_{\deg R}}\ (z)^{\gamma(R)}\ R-\frac{a_{R_{\gamma(R)}}}{a_{S_{\gamma(S)}}}\, z^{\gamma(R)-\gamma(S)}\, a_{S_{\gamma(S)}}\ (z)^{\gamma(S)}\right)=$$

$$\gamma\left(a_{R_0}\pm..+a_{R_{\gamma(R)}}\ (z)^{\gamma(R)}-a_{R_{\gamma(R)}}\ (z)^{\gamma(R)}\right)<\gamma(R) \Rightarrow$$

Widerspruch zu $\gamma(R)=\min\{\gamma(M)\} \Rightarrow \gamma(R)\geq\gamma(S)$ falsch $\Rightarrow$ Beh

Eindeutigkeit:

Annahme $\exists\ \tilde{Q}, \tilde{R}$ : $P=\tilde{Q}\,S+\tilde{R}$ , $\gamma(\tilde{R})<\gamma(S)$ S $\Rightarrow$ $(Q-\tilde{Q})S=\tilde{R}-R \underset{\gamma(R)<\gamma(S)}{\Rightarrow}$

$\gamma(\tilde{R}-R)<\gamma(S)$.

Annahme $Q\neq\tilde{Q}$ : $\gamma(\tilde{R}-R)=\gamma((Q-\tilde{Q})S)=\gamma(Q-\tilde{Q})+\gamma(S)\geq\gamma(S) \underset{\gamma(\tilde{R}-R)<\gamma(s)}{\Rightarrow}$

Widerspruch $\Rightarrow Q=\tilde{Q} \wedge R=\tilde{R}$

Andere Formulierung:

K[x] Menge aller Polynome mit Potenzen von x.

Sei $f,g\in K[x]$, $g\neq 0$, dann

$\exists$ eindeutig bestimmte $q,r\in K[x]$ und $f=qg+r$, $\gamma(r)<\gamma(g)$

Bew: Existenz

$f(x)=a_0+...+a_nx^n$, $g(x)=b_0+...+b_mx^m$, $a_n,b_m\neq 0$ ($f=0 \Rightarrow q=0$)

Fall n<m setze r=f und q=0 ...ok

Fall n>m setze $q_1=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ Polynom, setze $f_1=f-q_1g \Rightarrow \gamma(f_1)<\gamma(f)\Rightarrow$

Wiederhole bis $\gamma$ kleiner $\gamma(g)$ wird.

Eindeutigkeit

$f=qg+r$, $f'=q'g+r'\Rightarrow r-r'=q'g-qg=(q'-q)g$ wobei $\gamma(r)<\gamma(g)$ und $\gamma(r')<\gamma(g)$

$\gamma(g)>\gamma(r-r')=\gamma(q'-q)+\gamma(g) \Rightarrow \gamma(q'-q)<0 \Rightarrow \gamma(q'-q)=-\infty \underset{\text{D1.9.1 4.)}}{\Rightarrow} q'-q=0 \Rightarrow$

$q'=q$ und $r'=r$

Bsp: $f(x)=x^5-1$, $g(x)=x^2+2$

$(x^5-1):(x^2+2)=x^3-2x$ Rest $4x-1$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(x^5+2x^3)} \\
\quad -2x^3-1 \\
\quad \underline{-(-2x^3-4x)} \\
\qquad\quad 4x-1
\end{array}$$

**S1.9.1''''**(1105) $|z|\geq\rho:=2\,\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|}{|a_n|}$ & $|x|\geq(2\,\underline{G}/a_n|)^{1/n}$, $\underline{G}\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow$

$|P(z)|\geq \underline{G}$

*//**S1.2.1** (406) Vor: K angeordnet, $a,b\in K$ 7.) $|a+b|\geq||a|-|b||\geq|a|-|b|$//*

Bew: $P(z):=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$, $a_n\neq0 \Rightarrow$

$a_nz^n(1+b_{n-1}\frac{1}{z}+b_{n-2}\frac{1}{z^2}+\ldots b_0\frac{1}{z^n})=a_nx^ng(z)$, $b_{n-k}:=a_{n-k}/a_n$.

Sei $\beta:=1+|b_{n-1}|+|b_{n-2}|+\ldots|b_0|\geq1 \Rightarrow$

$h(z):=|b_{n-1}\frac{1}{z}+b_{n-2}\frac{1}{z^2}+\ldots b_0\frac{1}{z^n}|\leq(|b_{n-1}|+|b_{n-2}|+\ldots|b_0|)\frac{1}{|z|}\leq\frac{\beta}{|z|}\underbrace{\Rightarrow}_{|z|\geq2\beta}$

$h(z)\leq\beta/2\beta=1/2 \Rightarrow$

$|g(z)|=|1+b_{n-1}\frac{1}{z}+b_{n-2}\frac{1}{z^2}+\ldots b_0\frac{1}{z^n}|\underbrace{\geq}_{S1.2.1\ 7.)}1-|b_{n-1}\frac{1}{z}+b_{n-2}\frac{1}{z^2}+\ldots b_0\frac{1}{z^n}|=1-h(z)\geq1/2 \Rightarrow$

$|P|=|a_nx^ng(z)|=|g(z)||a_nx^n|\geq(1/2)|a_nx^n|$ für

$|z|\geq2\beta=\rho:=2(1+|b_{n-1}|+|b_{n-2}|+\ldots|b_0|=2\frac{a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+a_0}{|a_n|} \Rightarrow$

$|z|\geq\rho \wedge |z|\geq(2\,\underline{G}/|a_n|)^{1/n} \Rightarrow P\geq1/2*((2\,\underline{G}/|a_n|)^{1/n})^n=\underline{G}$

**P1.9.2** $f\in K[z]$, $f\neq0$, $\lambda\in K$ Nullstelle von f $\Rightarrow$

$\exists\ g\in K[z]$, $f(z)=(z-\lambda)^pg(z)$, Vielfachheit der Nullstelle $p\in\mathbb{N}$, $g(\lambda)\neq0$

Bew: S1.9.1''' $\Rightarrow$ $f(z)=(z-\lambda)g_1(z)+r(z) \Rightarrow$ $\gamma(r(z))<\gamma(z-\lambda)=1$ $\Rightarrow$ r konstant $\Rightarrow$

$0=f(\lambda)=r(\lambda) \Rightarrow r=0 \Rightarrow f(z)=(z-\lambda)g_1(z)$

Bsp: $(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)\underbrace{=}_{x=1}0$

$-(x^3-x^2)$

$x^2-1$

$-(x^2-x)$

$x-1$

$-(x-1)$

$0$

**S1.9.2**(1107) Identitätssatz für Polynome

Vor: Seien Polynome $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $Q(z)=\sum_{k=0}^{m}b_kz^k$ mit $n,m\in\mathbb{N}_0$, $n\geq m$ gegeben. Für $n+1$ verschiedene Zahlen $z_1,\ldots,z_{n+1}\in\mathbb{C}$ gelte $P(z_j)=Q(z_j)$, $j=1,2,\ldots,n+1$

Beh: $m=n$ und $a_k=b_k$ $\forall$ $k=0,1,2,\ldots,n$, also $P(z)=Q(z)$, $0\leq k\leq n$

*//**S1.9.1**(1103) Vor: Sei P einPolynom vom $\gamma(P)\geq1.n\in N_0$//*

*// 2.) P(z) hat max n Nullst in C, außer wenn es das//*

*// Nullpolynom ist.//*

Bew: $P(z)-Q(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k-\sum_{k=0}^{m}b_kz^k$. Falls $n>m$, dann sei $b_k=0$ $\forall$ $k=m+1,\ldots,n$

$P(z)-Q(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)z^k$ ist Polynom mit $\gamma(P-Q)\leq n$

$P(z_j)-Q(z_j)=0$, $j=1,\ldots,n+1 \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.1\ 2.)} P(z)-Q(z)\equiv0 \Rightarrow P(z)=Q(z)$

Bem: $\sum_{\nu=m_1}^{n_1}\sum_{\nu=m_2}^{n_2}a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=m_2}^{n_2}\sum_{\nu=m_1}^{n_1}a_{\nu\mu}$, $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n}a_{\nu\mu}$, $1\leq\mu\leq\nu\leq n$

Bem:Sei eine rationale Funktion $R\in K[x]$. Nach dem Nullstellensatz kann das Nennerpolynom von R nur endlich viele Nullstellen haben. Also ist der natürliche Definitionsbereich von R gleich $K\setminus T$, wobei $T$ eine endliche (evt sogar leere) Teilmenge von $K$ ist. $\binom{2n}{k}$

Bsp: $((1+z)^n)^2=(1+z)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^k$, $\sum_{k=0}^{2n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\binom{2n}{k}$

*//**A1.9.2** (1101) $n,m\in N$, $a_0,...,a_n,b_0,...,b_m\in C$; $a_n,b_m\neq 0$;//*

*//$P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$; $Q(z)=\sum_{k=0}^{m}b_kz^k$ : $P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kz^k$ , $c_k=\sum_{\nu+m=k}a_\nu b_\mu$,//*

*//$k=0,...,n+m$; $a_k=0$ $\forall$ $k>n$ $\wedge$ $b_k=0$ $\forall$ $k>m$//*

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$: 3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$ //*

$$((1+z)^n)^2=\Big(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j\Big)^2=\Big(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{j}z^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j\Big)=\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{j}z^{i+j}\Big)\underbrace{=}_{A1.9.2}$$

$$\sum_{\ell=0}^{2n}\sum_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n\\i+j=l}}\binom{n}{j}\binom{n}{j}z=\sum_{\ell=0}^{2n}\sum_{i=0}^{\ell(j=0)}\binom{n}{i}\binom{n}{l-1}z \quad \text{Polynome gleich} \Rightarrow$$

Koeffizientenvergleich $\binom{2n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{2n}{k-i}$ $\forall$ $k\in\{0,1,...,2n\}$

Setze k=#2n: $\binom{2n}{k}=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}\underbrace{=}_{A1.9.2}\underbrace{\binom{n}{k-1}}_{=\binom{n}{i}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}+\sum_{i=n+1}^{2n}\underbrace{\binom{n}{i}\binom{n}{i}}_{=0}=\sum_{i=0}^{2n}\underbrace{\binom{n}{i}\binom{n}{i}}_{=0}$

**A1.9.3**

a)Beweise $\binom{p+q}{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}*\binom{q}{\nu-1}$

Lös: $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$ $\forall$ $x\in R$ $\wedge$ : $(1+x)^p(1+x)^q=[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j][\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{j}x^k]=$

$$=\sum_{\nu=0}^{p+q}x^\nu\sum_{j=0}^{\nu}\binom{q}{j}\binom{q}{\nu-1}\quad\underbrace{\Rightarrow}_{Koeffizientenvergleich}\quad \text{Beh}$$

b)Beweise $\forall$ $n,m\in N$ die Gleichung $\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n}{k}*\binom{m}{k}=\binom{m+n}{n}$

*//**A1.9.2** (1101) $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $Q(z)=\sum_{k=0}^{m}b_kz^k$://*

*//$P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kz^k$, $c_k=\sum_{\nu+\mu=k}a_\nu b_\mu$, $k=0,...,n+m$, //*

*// $a_k=0$ $\forall$ $k>n$ und $b_k=0$ $\forall$ $k>m$ gesetzt sei.//*

Bew: $P(z)=(1+z)^{m+n}$. Dann gilt $P(z)=\sum_{\nu=0}^{n+m}\binom{m+n}{\nu}z^\nu$ und

$$P(z)=(1+z)^m(1+z)^n=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}z^j\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k=\sum_{\nu=0}^{n+m}z^\nu\sum_{\substack{0\le j\le m\\0\le k\le n\\j+k=\nu}}\binom{m}{j}\binom{n}{k}=\sum_{\nu=0}^{n+m}z^\nu\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{n}{\nu-j}.$$

Nach Identitätssatz für Polynome $\binom{n}{n-j}$

$$\binom{m+n}{n} = \sum_{j=0}^{m+n} \binom{m}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{m+n} \underbrace{\binom{m}{j}\binom{n}{j}}_{0 \text{ für } j>m,n}$$

**A1.9.4** (Polynomdivision) Gegeben seien Polynome F und G mit G$\not\equiv$0. Beweise, dass dann Polynome Q und R mit $\gamma$(R)<$\gamma$(G) existieren mit F(x)=Q(x)G(x)+R(x) $\forall$ x$\in\mathbb{R}$. Sind Q und R eindeutig bestimmt?

Hinweis: Es sei $\gamma$(G)=m und $\gamma$(F)=n+1 sowie $G(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ und $F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$. O.B.d.A. sei m>0. Führe eine Induktion nach n durch. Reduziere hierbei den Grad durch Betrachtung des Polynoms $\tilde{F}(x) = F(x) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} G(x)$.

Bew: #Vorbetrachtung:

# $\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k\right) : \left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) = (a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \ldots\ a_0 x^0) : (b_m x^m + \ldots b_0 x^0) =$

# $\frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} + \ldots\ldots\ldots$ usw.

#1. Rest: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} * (b_m x^m + \ldots b_0 x^0) =$

# $\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k - a_{n+1} x^{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} * (b_{m-1} x^{m-1} + \ldots b_0 x^0) =$

# $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} * (b_{m-1} x^{m-1} + \ldots b_0 x^0)$

O.B.d.A. $\gamma(G)>0$, sonst $G(x)\equiv c\neq 0 \Rightarrow F(x)=\underbrace{\frac{F(x)}{c}}_{=Q(x)}G(x)+\underbrace{0}_{R(x)}$

A(n): Zu jedem Polynom $F$ vom $\gamma(F)\le n$ und $G$ vom $\gamma(G)=m$ existieren Polynome Q und R wie oben.

Bew:von A(n) $\forall\, n\in\mathbb{N}$ mit Induktion nach n. Setze $m=\gamma(G)$.

Der „erste“ Rest #bezogen auf $\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k\right):\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)$...hat noch #nichts mit Induktion nach n+1 zu tun

$\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=\sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_0x^0)\Rightarrow$

grad $\tilde{F}(x)=n<n+1$, d.h. es gilt $A_{(n)}$

weiter siehe unten

\# $n\le m-1$, d.h. auch

$n=m-1$: Es sei $\gamma(F)<\gamma(G)=m$.

Setze $Q(x)\not\equiv 0$ und $R(x)\equiv F(x)\Rightarrow$

$\gamma(R)<m$ und $F(x)=\underbrace{Q(x)}_{=0}G(x)+R(x)$

$n\mapsto n+1$: Es gelte $A_{(n)}$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Weiter $G(x)=\sum_{k=v}^{m} b_kx^k$ mit $b_m\neq 0$

und $F(x)=\sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k$ ein Polynom $\gamma\le n+1$

Betrachte $\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=$

$\sum_{k=0}^{n}a_nx^k+a_{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\left(-b_mx^m-\sum_{k=0}^{m-1}b_kx^k\right)=$

$\sum_{k=0}^{n}a_nx^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\sum_{k=0}^{m-1}b_kx^k=\sum_{k=0}^{n}a_nx^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}\sum_{k=0}^{m-1}b_kx^{k+n+1-m}$

$\underbrace{\Rightarrow}_{k\le m-1;\; n+1-m\le k+n+1-m\le n}$ grad$(\tilde{F})\le n$ $\underbrace{\Rightarrow}_{IndHyp}$

$\exists$ Polynom mit $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ mit $\tilde{F}(x)=\tilde{Q}(x)G(x)+\tilde{R}(x)$ und $\gamma(\tilde{R})<m$

$F(x)=\tilde{F}(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=\tilde{Q}(x)G(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)+\tilde{R}(x)=$

$\underbrace{\left(\tilde{Q}(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\right)}_{=Q(x)}G(x)+\underbrace{\tilde{R}(x)}_{=R(x)}$

Eindeutigkeit:

Es gelte $F(x)=Q_1(x)G(x)+R_1(x)=Q_2(x)G(x)+R_2(x)$ mit $\gamma(R_1)<m$ $\vee$ grad$(R_2)<m$

$\Rightarrow$ $(Q_1(x)-Q_2(x))G(x)=R_1(x)-R_2(x)$

Annahme $Q_1\neq Q_2$ $\Rightarrow$ $\gamma((Q_1(x)-Q_2(x))G(x))\ge m$ Widerspruch zu

$\gamma(R_2(x)-R_1(x))\le m-1$ $\Rightarrow$ $Q_1(x)\equiv Q_2(x)$ $\Rightarrow$ $R_1(x)\equiv R_2(x)$

**A1.9.5**

$$S(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k,\quad T(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k,\qquad a_m\neq 0,\ b_n\neq 0,$$

$$(S*T)(x)=\Big(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\Big)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j x^{k+j}=\sum_{\underbrace{l}_{=k+j}=0}^{m+n}\ \sum_{k+j=l} a_j b_k x^l,\quad 0\le k\le m,\ 0\le j\le n$$

Höchste Potenz $m+n$, $\gamma(S*T)=\gamma(S)+\gamma(T)$.

$$(S+T)(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k+\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \underbrace{=}_{oBdA\ m\le n} \sum_{k=0}^{m}(a_k+b_k)x^k+\sum_{k=m+1}^{n} b_k x^k \Rightarrow \gamma(S+T)=\begin{cases} n, \text{ falls } m<n\\ \ge m, \text{ falls } m=n\end{cases} \ldots$$

falls $a_m+b_m=0\ldots<\ldots\gamma(S+T)\le\max\{\gamma(S),\gamma(T)\}$

$$P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}=\binom{x+\alpha}{\nu}=\frac{(x+\alpha)(x+\alpha-1)\ldots(x+\alpha-\nu+1)}{\nu!},$$

Zähler $\nu$ Faktoren $\Rightarrow\gamma(P(x))=\nu$

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+j+1)}{(\nu-j)!}\right)$$

a) Seien $P,Q,Q_1$ und $R$ Polynome.
Zeige: (.) Aus $P=Q_1Q+R$ mit $\gamma(R)<\gamma(Q)$ folgt $\gamma(Q_1)=\gamma(P)-\gamma(Q)$,
außer
(..) wenn $\gamma(P)<\gamma(Q)$ und dann ist $Q_1$ das Nullpolynom.

Lös: (*) $\gamma(P)=\gamma(Q_1Q+R)\le\max\{\gamma(Q_1Q),R\}=\max\{\gamma(Q_1)+\gamma(Q),\ \gamma(R)\}$

(.) $\gamma(P)\ge\gamma(Q)$, Beh. $Q_1$ ist nicht Nullpolynom
Bew: Annahme $Q_1$ ist Nullpolynom $\Rightarrow$
$\gamma(P)=\gamma(Q_1Q+R)\le\max\{\gamma(Q_1Q),R\}\underbrace{=}_{QQ_1=0}\gamma(R)\underbrace{\Rightarrow}_{*}$
$\gamma(P)\le\gamma(R)<\gamma(Q)\Rightarrow$ Widerspruch zur Vor. $\gamma(P)\ge\gamma(Q)$
$\gamma(Q_1Q)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ge\gamma(Q)\ge\gamma(R)\Rightarrow$
in (*) gilt „=“ also $\gamma(P)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\Rightarrow$
$\gamma(Q_1)=\gamma(P)-\gamma(Q)$

(..) $\gamma(P)<\gamma(Q)$. Annahme: $Q_1$ ist nicht Nullpolynom $\Rightarrow$
$\gamma(Q_1Q)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ge\gamma(Q)>\gamma(R)\Rightarrow$
$\gamma(P)=\max\{\gamma(Q_1)+\gamma(Q),\ \gamma(R)\}=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ge\gamma(Q)$
Widerspruch zur Vor $\Rightarrow Q_1$ Nullpolynom

b) Finde Polynome $Q_1$ und $R$ mit $x^5-2x^2=Q_1(x)(x-1)^2+R(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, und $\gamma(R)<2$.

Lös: $(x^5-2x^2):(x^2-2x+1)=x^3+2x^2+3x+2$ Rest $x-2\Rightarrow$
$(x^5-2x^2)=(x^3+2x^2+3x+2)(x-1)^2+(x-2)$
$(\gamma(P)=5>\gamma(Q)=3\Rightarrow\gamma(Q_1)=5-2=3)$,
$(x^5-2x^2)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(x^2-2x+1)+b_0+b_1x=\ldots.$
$a_3x^5+(a_2-2a_3)x^4+(a_1-2a_2+a_3)x^3+(a_0-2a_1+a_2)x^2+(-2a_0+a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$
$a_3=1$, $a_2-2a_3=0, a_2=2$, $a_1-4+1=0$, $a_1=3$, $a_0-6+2=2$, $a_0=6$, $-12+2+b_1=0$,
$b_1=9$, $6+b_0=0$, $b_0=-6)$

**A1.9.6** Zeige: Sind $P,Q\in K_n[x]$, so ist $PQ\in K[x]$ und es gilt $\gamma(PQ)=\gamma(P)+\gamma(Q)$, auch falls eines der Polynome (oder beide) das Nullpolynom ist (sind)

**A1.9.7** Zeige, daß die Menge $K(x)$ der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in $K$ ein Körper ist.

**A1.9.8** Beweise für $\nu\in\mathbb{N}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ die Identität

(*) $\sum_{j=0}^{\nu} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}$. Siehe auch A1.9.3.

Anleitung: Nimm zunächst $\alpha=p\in\mathbb{N}$ an. Zeige, dass dann $P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}$ und $Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}$ Polynome vom Grad $\le \nu$ sind. Folgere aus Aufgabe Polynomdivision, dass $P(x)=Q(x)$ gilt $\forall\ x\in\mathbb{N}$. Wende dann den Idenditätssatz für Polynome an. Schließe dann analog, dass die Gleichung auch für $\alpha\in\mathbb{C}$ gilt.

//**A1.7.9** *(910)Zeige für $p,q,\nu\in N_0$ die Formel* $\binom{p+q}{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}\binom{q}{\nu-j}$ *.//*

//**A1.9.3** *(1107)Beweise $\forall$ n,mnk$\in$N die Gleichung* $\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n}{k}*\binom{m}{k}=\binom{m+n}{k}$ //

*//Bew:$P(z)=(1+z)^{m+n}$. ....Nach Identitätssatz für Polynome//*

// $\binom{m+n}{n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{m+n}\underbrace{\binom{m}{j}\binom{n}{j}}_{0\text{ für }j>m,n}$ //

Bew:(*)A1.7.9, A1.9.3: $\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}$ $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}$ (nicht $\in\mathbb{C}$!)

Zunächst $\alpha=p\in\mathbb{N}$.

Setze $P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}=\frac{\overbrace{(\alpha+x)(\alpha+x-1)\dots(\alpha+x-\nu+1)}^{\nu\ Terme}}{\nu!}\Rightarrow \gamma(P)\le\nu$

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-\nu+1)}{(\nu-j)!}\Rightarrow\gamma(Q)\le\nu$$

Es gilt $P(x)=Q(x)$ $\forall\ x\in\mathbb{N}$ wegen (*).
$P(x)$ und $Q(x)$ stimmen an mehr als $\nu+1$ Stellen überein...
Idenditätssatz Polynome $\Rightarrow P(x)=Q(x)\ \forall\ x\in\mathbb{C}\Rightarrow$

$\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}$ $\forall\ \alpha\in\mathbb{N},\ \beta\in\mathbb{C}$ (**)

$\tilde{P}(x)=\binom{\alpha+\beta}{\nu}$, $\tilde{Q}(x)=\sum_{j=1}^{\nu}\binom{x}{j}\binom{\beta}{\nu-j}$, $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)$ $\forall\ x\in\mathbb{N}$ wegen (**).

Idenditätssatz: $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)$ $\forall\ x\in\mathbb{C}$.
?????????????????????????????????????????????????????????

**A1.9.9** Algebraische Zahlen. Eine Zahl $\xi$ heißt algebraische Zahl, wenn $\xi$ Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn also $a_0,...,a_n \in \mathbb{Z} (a_n \neq 0)$ existieren mit $a_0+a_1\xi+...+a_n\xi^n=0$.
Insbesondere ist jede rationale Zahl p/q als Lösung der Gleichung
p-qx=0 # $\underbrace{p}_{a_0} \underbrace{-q}_{a_1} \underbrace{x}_{\zeta}$ =0# eine algebraische Zahl.

a) Zeige, dass die Menge der Polynome mit <u>ganzzahligen</u> Koeffizienten abzählbar ist.

Lös: Z.z. $M=\{P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n,\ n\in\mathbb{N},\ a_j\in\mathbb{Z}: j=1...n\}$ abzählbar

Bew: $M= \bigcup_{n\in N} M_n = \bigcup_{n\in N} \{P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n,\ a_j\in\mathbb{Z}: 1...n\}$

($M_n$ Polynome vom Grad$\leq$n)

Beh: $M_n$ höchstens abzählbar $\Rightarrow$ M höchstens abzählbar

Bew: Sei $n\in\mathbb{N}$ fest, setze j={0,1,2...,n} endlich und $A_j=\mathbb{Z}\neq\emptyset$.

? $A= \overset{n}{\underset{j=0}{È}} A_j=\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\cup..\mathbb{Z}$ (n+1 mal).

$\forall\ P\in M_n,\ P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\ a\in\mathbb{Z}$ ist durch $f:J\rightarrow A,\ f(j)=a_j$ eine Abb definiert und umgekehrt für $f:J\rightarrow A\ f(j)\in\mathbb{Z}$ ist ein Polynom definiert d.h. $M_n=\underset{jÎJ}{X}\mathbb{Z}=\overset{n}{\underset{j=0}{X}}\mathbb{Z}$ kart Prod endlich.

$\mathbb{Z}$ höchstens abzählbar $\Rightarrow M_n$ höchstens abzählbar

b) Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

Lös: Z.z. A={$\xi$ ist algebraische Zahl} ist höchstens abzählbar.

Bew: $A=\{\xi\in\mathbb{C}: P(\xi)=0$ für ein $P\in M\}$ =

$\underset{n\in N}{È}\{\xi\in\mathbb{C}: P(\xi)=0$ für ein $P\in M_n\}=\underset{n\in N}{È} A_n$.

Es gilt: $P\in M_n$, $(\gamma)P\leq n \Rightarrow$ es gibt max n Nullstellen.

Beh: $A_n$ ist höchstens abzählbar $\Rightarrow$ A ist höchstens abzählbar.

Bew: $A_n=\bigcup_{P\in M_n}\{\underbrace{\xi\in C: p(\xi)=0}_{N_{\text{p max n Elemente}}}\}$, $M_n$ abzählbar $\Rightarrow A_n=\underset{p\in M_n}{È} N_p$

höchstens abzählbar.