S1.9.3 (1150) Cauchy-Schwarz Ungleichung

Vor: $n\in\mathbb{N}_0, a_k, b_k\in\mathbb{C}$, $1\le k\le n$ dann

Beh: $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2 \le (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2)$ auch $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2}$

*//**S1.6.2** $z,\in C$ 1.) (802) $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$ $|z|=|-z|\ge 0$ $\forall$ $z\in C$ und $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$,// //$|z|=|\bar{z}|=\sqrt{z\bar{z}} \Leftrightarrow |z|^2=|\bar{z}|=z\bar{z}$*

*//(801)**Eigenschaften der komplexen Zahlen**//*

//Für $z,z_1,z_2\in C$ gilt : 3.) $\bar{\bar{z}}=z$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ mit $z_2\ne 0$, $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

Bew: Mit Lagrange Identität

$$(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2)-|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} |a_\nu\overline{b_\mu}-a_\mu\overline{b_\nu}|^2\ge 0.$$

$$(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2)-|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2 \underbrace{=}_{S1.6.2\ 1.)} (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2)-(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)(\overline{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}) =$$

$$(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\overline{a_\nu})(\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu\overline{b_\mu})-(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu)(\sum_{\mu=1}^{n} \overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})=$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=\nu+1,1\le\nu\le\mu\le n}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu}) \underbrace{=}_{*}$$

$$* \ (\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=\nu+1,1\le\nu\le\mu\le n}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\nu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})$$

da für $\nu=\mu=1,2,...$z.B $a_1\overline{a_1}b_1\overline{b_1}-a_1 b_1\overline{a_1}\ \overline{b_1}=0$!)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})+\underbrace{\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\mu}}_{\text{Vertausche }\mu\text{ mit }\nu}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu})=$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}(a_\nu\overline{a_\nu}b_\mu\overline{b_\mu}-a_\nu b_\nu\overline{a_\mu}\ \overline{b_\mu}+a_\mu\overline{a_\mu}b_\nu\overline{b_\nu}-a_\mu b_\mu\overline{a_\nu}\ \overline{b_\nu})=$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}(a_\nu\overline{b_\mu}-a_\mu\overline{b_\nu})(\overline{a_\nu}b_\mu-\overline{a_\mu}b_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}|a_\nu\overline{b_\mu}-a_\mu\overline{b_\nu}|^2\ge 0 \quad (\text{da} |\ |^2)$$

Bem: Es gilt $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2=(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2) \Leftrightarrow$

$a_\nu\overline{b_\mu}-a_\mu\overline{b_\nu}=0$ $\forall$ μ,ν mit $1\le\mu\le\nu\le n \Leftrightarrow$

$\exists\ \lambda\in\mathbb{C}$: $a_\nu=\lambda\overline{b_\nu}$ $\forall$ $\nu=1,...,n$ oder $b_\nu=\lambda\overline{a_\nu}$ $\forall$ $\nu=1,...,n$

Bew:Aus Lagrangeidentität

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} |a_\nu \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_\nu}|^2$$ Damit gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2\right) \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} \underbrace{\left|a_\nu \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_\nu}\right|^2}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$|a_\nu \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_\nu}| = 0 \;\forall\; \nu,\mu: \nu \geq \mu \Leftrightarrow a_\nu \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_\nu} = 0 \;\forall\; \nu,\mu: \mu \leq \nu \underset{*}{\Leftrightarrow}$$

$\exists\; \lambda \in \mathbb{C}: a_\nu = \lambda \overline{b_\nu} \;\forall\; \nu = 1,..,n$ oder $\exists\; \lambda \in \mathbb{C}: b_\nu = \lambda \overline{a_\nu} \;\forall\; \nu = 1,..,n$

*„⇒„1.Fall $b_1, ... b_n = 0$. Wähle $\lambda = 0 \Rightarrow b_\nu = \lambda \overline{a_\nu} \;\forall\; \nu = 1,..,n$

2.Fall $b_{\nu_0} \neq 0$ für ein ν_0: Wähle $\lambda = a_{\nu_0} / \overline{b_{\nu_0}} \Rightarrow$

$a_\nu = \lambda \overline{b_\nu} \;\forall\; \nu = 1,..,n$ denn

$$(.)\; a_{\nu_0} \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_{\nu_0}} = 0 \Rightarrow a_\mu = \frac{a_{\nu_0} \overline{b_\mu}}{\overline{b_{\nu_0}}} = \lambda \overline{b_\mu},\quad \mu = 1, ..., \nu_0$$

$$(..)\; a_\nu \overline{b_{\nu_0}} - a_{\nu_0} \overline{b_\nu} = 0 \Rightarrow a_\nu = \frac{a_{\nu_0} \overline{b_\nu}}{\overline{b_{\nu_0}}} = \lambda \overline{b_\nu},\quad \forall\; \nu = \nu_0, .., n$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, \text{falls } b_1 = .. b_n = 0 \\ a_{\nu_0} / \overline{b_{\nu_0}}, \text{falls } b_{\nu_0} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda : \begin{cases} b_\nu = \lambda * \overline{a_\nu} \forall \nu \\ a_\nu = \lambda * \overline{b_\nu} \forall \nu \end{cases}$$

„⇐„1.Fall $\exists\; \lambda \in \mathbb{C}: a_\nu = \lambda \overline{b_\nu} \;\forall\; \nu = 1,..,n \Rightarrow$

$a_\nu \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_\nu} = \lambda b_\nu \overline{b_\mu} - \lambda \overline{b_\mu} b_\nu = 0$

2.Fall $\exists\; \lambda \in \mathbb{C}: b_\nu = \lambda \overline{a_\nu} \;\forall\; \nu = 1,..,n \Rightarrow$

$a_\nu \overline{b_\mu} - a_\mu \overline{b_\nu} = ...0 \;\forall\; \mu \leq \nu$

$\underset{*}{\Leftrightarrow}$ bedeutet $\begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ . \\ . \\ \overline{b_n} \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{C}^n$.

(..)Arithmetisches-geometrisches Mittel Ungleichung:
Für $a,b \geq 0$ gilt: $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$

S1.9.3'(1151)Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right.$ statt $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|$ in S1.9.3)

Vor: $n \in \mathbb{N}_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},\; 1 \leq k \leq n$ Beh: $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}}_{A} \underbrace{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} {b_k}^2}}_{B}$

//**S1.8.2**(1000)$x_1, ... x_n \geq 0$: $G(x_1, ... x_n) \leq A(x_1, ... x_n)$ und Gleichheit tritt genau
// dann ein, wenn alle x_j gleich sind.//

Bew: $A = 0 \Rightarrow a_k = 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N}$, $B = 0 \Rightarrow b_k = 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N} \Rightarrow A, B > 0$

$$\alpha_k := |a_k|/A,\; \beta_k := |b_k|/B \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \equiv \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_k^2 \beta_k^2} \underset{S1.8.2}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \leq 1$$

S1.9.4(1152) Cauchy Produkt

Es seien Polynome $P(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ mit $a_n\neq 0$ und $Q(z)=\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu z^\nu$ mit $b_m\neq 0$ gegeben. Dann ist $(P*Q)(z)$ ein Polynom vom $\mathrm{grad}(P*Q)=n+m$ mit $(P*Q)(z)=\sum_{\nu=0}^{n+m} c_\nu z^\nu$ mit Koeffizienten $c_k=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}=\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu a_{k-\nu}$, $1\leq k\leq n+m$, wobei wir $a_\nu=b_\nu=0$ setzen, wo die Koeffizienten nicht definiert waren.

Bew: $P(z)*Q(z)=\sum_{\nu,\mu=0}^{n,m} a_\nu b_\mu z^{\overbrace{\nu+\mu}^{k}}=\sum_{k=0}^{n+m} z^k \sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu=\sum_{k=0}^{n+m} z^k \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}$.

$$\left(\sum_{\nu,\mu=0}^{n,m}=\sum_{\nu}\sum_{\mu=0}^{m}\right)$$

A1.9.9 (Minkowski-Ungleichung) Zeige, dass für $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}$$

Bew: Es gilt $\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k||a_k|+\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k||b_k| \underset{\text{CauchySchwarz}}{\leq}$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}\Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\sqrt{|a_k+b_k|^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}}=$$

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}$ Beh, wenn $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}>0$ (Bei =0 Beh offensichtlich)

(1152) **Interpolation mit Polynomen**

In diesem Abschnitt seien n+1 verschiedene Zahlen $x_0,...x_n\in K$ (die Stützstellen) und ebenso viele (nicht unbedingt verschiedene) Werte $p_0,...p_n\in K$ fest gegeben. Unter dem Problem der Polynominterpolation versteht man die Aufgabe, ein Polynom möglichst kleinen Grades zu finden, welches an den Stellen x_k die gegebenen Werte p_k annimmt.

$P(x_k)=Q(x_k)$, $0\leq k\leq n$, Eindeutigkeit klar.

$P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $P(x_k)=p_k$, $k=0,...,n$

$L_k(x)=\prod_{\nu=0,\nu\neq k}^{n}\frac{x-x_\nu}{x_k-x_\nu}$ (Pol nten Grades)

$L_k(x_k)=1$, $L_k(x_\mu)=0$, $\mu\neq k$, 1 Faktor 0 für $\mu=k$

$P(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k L_k(x)\Rightarrow P(x_\mu)=\sum_{k=0}^{n} p_k L_k(x_\mu)=p_\mu \underbrace{L_\mu(x_\mu)}_{=1}$

S1.9.5(1153) Hauptsatz der Polynominterpolation
Zu n+1 verschiedenen Stützstellen $x_0,...x_n$ und beliebigen Werten $p_0,...p_n$ gibt es genau ein $P\in K_n[x]$ mit $P(x_k)=p_k$, für $0\le k\le n$.

Bew: Setze $L_k(x)=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$, $0\le k\le n$. Dann ist offenbar $L_k\in K_n[x]$

und $L_k(x_\nu)=\delta_{k\nu}=\begin{cases}1 & (k=\nu)\\ 0 & (k\neq\nu)\end{cases}$ Daraus folgt, daß $P(x)=\sum_{k=0}^{n} p_kL_k(x)$ ein Polynom mit den gewünschten Eigenschaften ist. Die Eindeutigkeit folgt mit Identitätssatz S1.9.2.

D1.9.2(1153) Die Formel $P(x)=\sum_{k=0}^{n} p_kL_k(x)$ heißt Lagrange Darstellung des Interpolationspolynoms. Sie ist für die konkrete Berechnung weniger geeignet als die im Folgenden behandelte Newtonsche Darstellung.

D1.9.3(1153) Interpolationspolynom Newtonsche Darstellung
Lösung
$N(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+a_n(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$,

$y_k=N(x_k)\ \forall\ 0\le k\le n\ \underset{x_k-x_k=0}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$y_0=a_0$
$y_1=a_0+a_1(x_1-x_0)$
$y_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$
.
.
$y_n=a_0+a_1(x_n-x_0)+a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\dots.$
$+a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})$

A1.9.10 Seien x_k und p_k wie oben, und sei P das zughörige Interpolationspolynom. Zeige: Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $b_k\in K$ so, daß für alle $x\in K$ gilt $P(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)$, wobei die übliche Konvention zu beachten ist, daß ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll. Diskutiere insbesondere, wieweit sich die b_k (nicht) ändern, wenn man eine weitere Stützstelle hinzunimmt. Diese Darstellung heißt Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms.
Lösung:

$p_0=P(x_0)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)=b_0\prod_{j=0}^{0-1}(x_0-x_0)=b_0$

$p_1=P(x_1)=b_0+b_1(x_1-x_0)\ \Rightarrow\ \frac{p_1-p_0}{x_1-x_0}=b_1$

$p_\mu=\sum_{k=0}^{\mu} b_k\prod_{j=1}^{\mu-1}(x_\mu-x_k)=b_\mu\prod_{j=1}^{\mu-1}(\ x_\mu-x_j)+\dots$

A1.9.11 Berechne das Interpolationspolynom zu den Daten $x_0=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$, sowie $p_0=1$, $p_1=2$, $p_2=1$.

Lös: $P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)$

$$p_0=P(x_0)=P(0)=1=b_0+b_1(\underbrace{\overset{0}{x}-\overset{0}{x_0}}_{0})+b_2*0 \Rightarrow b_0=1$$

$$p_1=P(x_1)=P(-1)=2=\underset{b_0}{1}+b_1(\underset{x}{-1}-\underset{x_0}{0})+b_2(-1-0)(-1-(-1)) \Rightarrow 2=1-b_1 \Rightarrow b_1=-1$$

$$p_2=1=P(2)=1-(2-0)b_2(2-0)(2-(-1)) \Rightarrow 1=-1+6b_2, b_2=1/3$$

A1.9.12 Finde das Interpolationspolynom vom Grade ≤ 3 zu den Stützstellen $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$ und den Werten $P_0=P_1=0$, $P_2=P_3=1$

Lös: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$

$a_0+a_10+a_20+a_30=0 \Rightarrow a_0=0$

$\Rightarrow a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$a_1+a_2+a_3=0$ $\qquad 2a_2=1$, $a_2=1/2$, $a_1+1/2+a_3=0$

$-a_1+a_2-a_3=1$ $\qquad 2a_1+2+8a_3=1$

$2a_1+4a_2+8a_3=1$ $\qquad 2a_1+1+2a_3=0$

$a_1=-1/2+1/6=-1/3$ $\qquad 1+6a_3=1$, $a_3=0$

Andere Formulierung

$$P(x)=\sum_{k=0}^{3} p_kL_k(x)$$

$$L_2(x)=\prod_{j=2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_3(x)=\prod_{j=3}\frac{x-x_j}{x_3-x_j}=\frac{x^3-x}{6}$$

$$P(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}+\frac{x^3-x}{6}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

A1.9.13 Bestimme die Nullstellen der Polynome $P(x)$ als Elemente von $\mathbf{R}[x]$ bzw $\mathbf{C}[x]$:

a) $P(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x$

Lös: Nullstellen bei 0 und 1....$=x(x-1)(x^2-x-6)=x(x-1)(x-3)(x+2)$

4 reelle Nullstellen. Gleiche Nullstellen in $\mathbf{C}[x]$.

b) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$

Lös: …Nullstellen $-1,2$. …$=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=(x+1)(x-2)(x-1)^2+2$...2reelle Nullstellen, in $\mathbf{C}$ 2 weitere komplexe Nullstellen. $x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{12-4}}{2}=1+i\sqrt{2}$, $1-i\sqrt{2}$

S1.9.6(1155) Wurzelfunktion

∀ $n\in N$ bildet die Abb $x\mapsto x^n$ das Intervall $[0,\infty)$ bijektiv auf sich selbst ab ⇔ ∃ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

*// **S1.3.1** 5.)(501)5) $x>0$ ˅ $A_x=\{a>0:a^2\le x\}$. //*
// Falls $\zeta=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.//
*//**S1.3.2** (513)Vor:Sei $x\ge 0, x\in R$. Beh:∃ genau ein $y:\sqrt{x}\in R$ mit $y\ge 0$ und $y^2=x$//*

Bew:Injektiv aus Monotonie.Surjektiv? Nimmt Fkt jeden Wert an?

Für $n=1$ ist nichts zu zeigen, deshalb sei jetzt $n\ge 2$ angenommen.
Injektiv: Da wir schon gezeigt haben, daß die Abb streng monoton wachsend ist, folgt sofort die Injektivität.
Surjektiv:Um die Surjektivität zu zeigen, sei ein $y_0\in[0,\infty)$ gegeben. Wegen $0^n=0$ können wir annehmen, daß $y_0>0$ ist. Die Menge $M=\{x:x^n\le y_0\}$ ist sicher nicht leer und nach oben beschränkt (entweder durch 1 oder y_0). Aus dem Vollständigkeitsaxiom schließen wir, daß M ein Supremum x_0 besitzt, und wir wollen $x_0^n=y_0$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon>0$(klein) gegeben.

Methode: x_0^n kann nicht kleiner und nicht größer als y_0 sein.

1. x_0^n kann nicht kleiner als y_0 sein:
   Es muß $(x_0+\varepsilon)^n>y_0$ sein , denn sonst wäre x_0 keine obere Schranke für M. Aber wir haben für $\varepsilon\le 1$:

   $$(x_0+\varepsilon)^n=x_0^n+\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}x_0^{n-m}\varepsilon^m \le x_0^n+\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}x_0^{n-m}\varepsilon = x_0^n+\varepsilon\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}x_0^{n-m} =$$

   $$x_0^n+\varepsilon\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x_0^{n-m}-x_0^n\right)=$$

   $$x_0^n+\varepsilon\left[(x_0+1)^n-x_0^n\right].$$

   Wäre jetzt $x_0^n<y_0$, so könnten wir ε so klein wählen, daß auch $(x_0+\varepsilon)^n<y_0$ wäre, was nicht sein kann ⇒ $(x_0+\varepsilon)^n\ge y_0$
2. x_0^n kann nicht größer als y_0 sein:
   Andererseits ist nach
   S1.5.6 (713) $x\in R$, $x\ge -1$, $n\in N$,$(1+x)^n\ge 1+nx$, = ⇔ $x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$

   $$(x_0-\varepsilon)^n= x_0^n(1-n\varepsilon/x_0)^n \underset{S1.5.6}{\geq} x_0^n(1-n\varepsilon/x_0)=x_0^n-n\varepsilon x_0^{n-1}.$$

   Daraus sehen wir , dass bei Annahme von $x_0^n>y_0$ ein $\varepsilon>0$ existieren würde, für welches $(x_0-\varepsilon)^n>y_0$ wäre, was der Tatsache widerspricht,dass x_0 kleinste obere Schranke für M ist. Deshalb ist in der Tat $x_0^n=y_0$.

Andere Formulierung:

$x^p=a$ $[0,\infty)\to[0,\infty)$ $\forall$ $p\in\mathbb{N}$ hat genau <u>eine</u> Lösung $x=a^{1/p}=\sqrt[p]{a} \underbrace{\geq}_{!} 0$.

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow$ $\exists$ auf K. R:=<,Anordnungsaxiome://*
*// (O3) a<b und 0<c $\Rightarrow$ a*c < b*c //*
*//**S1.5.6** (715) $x\in\mathbb{R}$, $x\geq -1$, $n\in\mathbb{N}$, $(1+x)^n\geq 1+nx$, = $\Leftrightarrow$ x=0 oder n=0 oder n=1//*
*//**S1.7.4** (906) 6.) $\forall$ $a,b,z\in C$ $\wedge$ $n\in N_0$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$//*

#Bew: $a<b \wedge a>0 \underbrace{\Rightarrow}_{D1.2.1(O3)} a*a<b*a<b*b \underbrace{\Rightarrow}_{Induktion} a^n<b^n$

n=1: $x^1=a=a^{1/1}=\sqrt[1]{a}=a$

n>1: $M:=\{y\in\mathbb{R} \mid y\geq 0, y^p\leq a\}$, $M\neq\emptyset$, da $0\in M$ und beschränkt wie folgt.

$y^p<a<1+pa \underbrace{\leq}_{S1.5.6} (1+\underbrace{a}_{>0>-1})^p \Rightarrow y<1+a \Rightarrow$ M beschränkt $\Rightarrow$ $\exists$ $\xi:=\sup M$.

Ann $\xi^p<a$: $(\xi+1/n)^p \underbrace{=}_{S1.7.4} \xi^p+\binom{p}{1}\xi^{p-1}\frac{1}{n}+\binom{p}{2}\xi^{p-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots\underbrace{\binom{p}{p}}_{1}\left(\frac{1}{n}\right)^p <$

$\xi^p+\frac{\alpha}{n}$, $\alpha:=\binom{p}{1}\xi^{p-1}+\binom{p}{2}\xi^{p-2}+\ldots\binom{p}{p}\xi^{p-1}>0$.

$\xi^p+\frac{\alpha}{n}<a$ $\forall$ $n\geq n_0$, $\frac{1}{n_0}<\frac{a-\xi^p}{\underbrace{\alpha}_{>0}}$.

$\xi+1/n>\xi \wedge (\xi+1/n)^p<a \Rightarrow$ Widerspruch zu $\xi:=\sup M$

$\xi^p>a$: $(\xi-\frac{1}{n})^p=\xi^p(1-\frac{1}{n\xi})^p \underbrace{\geq}_{S1.5.6} \xi^p(1-\frac{p}{n\xi})$, falls $-\frac{1}{n\xi}>-1 \Rightarrow \frac{1}{n}<\xi$.

$\xi^p(1-\frac{p}{n\xi})>a$ $\forall$ $n\geq n_0$, $\frac{1}{n_0}<\frac{\xi(\xi^p-a)}{p\xi^p}:=\eta$

(aus $1-\frac{p}{n\xi}>\frac{a}{\xi^p} \Rightarrow -\frac{p}{n\xi}>\frac{a-\xi^p}{\xi^p} \Rightarrow \frac{p}{n\xi}<\frac{\xi^p-a}{\xi^p} \Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{\xi(\xi^p-a)}{p\xi^p}$)

Für $\frac{1}{n}<\xi \wedge \frac{1}{n}<\eta$ ist $0<\xi-\frac{1}{n}<\xi \wedge (\xi-\frac{1}{n})^p>a$

$0<\xi-\frac{1}{n}<\xi \Rightarrow \exists$ $y_0\in M$: $y_0>\xi-\frac{1}{n} \Rightarrow y_0^p>(\xi-\frac{1}{n})^p>a \Rightarrow y_0\notin M \Rightarrow$
Widerspruch zu $y_0\in M \Rightarrow$

$\xi^p=a \Rightarrow x^p=a$ $[0,\infty)\to[0,\infty)$ $\forall$ $p\in\mathbb{N}$ hat genau eine Lösung $x=a^{1/p}=\sqrt[p]{a}\geq 0$

#Bem:1.)Aus Umkehrfunktion: $(a^{1/p})^p=(\sqrt[p]{a})^p=a^{\frac{1}{p}*p}=a^1=a$

2.) $a,b>0$, $r=\frac{p}{q}$, $s=\frac{l}{m}\in\mathbb{Q}$:

a.) $a^ra^s=a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$ c) $(a^r)^s=a^{rs}$ d) $a^rb^r=(ab)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$

Bew:d) $x=a^{\frac{p}{q}}$, $y=b^{\frac{p}{q}} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.6} x^q=a^p$, $y^q=b^p \Rightarrow x^q*y^q=(xy)^q=(ab)^p \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.6}$

$a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}=a^rb^r=xy=(ab)^{\frac{p}{q}}=(ab)^r$.

a) $x=a^{r+s}=a^{\frac{p}{q}+\frac{l}{m}}=a^{\frac{pm+lq}{qm}} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.6} x^{qm}=a^{pm+lq}=a^{pm}a^{lq} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.6} x=((a^{pm})(a^{lq}))^{\frac{1}{qm}} \underbrace{=}_{d}$

$((a^{pm})^{\frac{1}{qm}}(a^{lq}))^{\frac{1}{qm}}=a^{\frac{pm}{qm}}a^{\frac{lq}{qm}}=a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{l}{m}}=a^{r+s}$

#**S1.9.7**(1157) a,b∈R, a,b>0 r∈Q. (.) r>0, a<b ⇔ $a^r<b^r$ (..) r<0, a<b ⇔ $a^r>b^r$

//(RR<)(400) 7.) 0<a<b ⇒ $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ //

#Bew: (.) p,q∈N, a<b $\underset{S1.9.7}{\Leftrightarrow}$ $a^{1/q}<b^{1/q}$ $\underset{S1.9.7}{\Leftrightarrow}$ $a^{p/q}<b^{p/q}$.

(..) r<0, -r>0: a<b $\underset{S1.9.7}{\Leftrightarrow}$ $a^{-r}<b^{-r}$ $\underset{RR<7.)}{\Leftrightarrow}$ $a^r>b^r$ ("Grobform")

#S1.9.8(1157) a∈R, a>0, r,s∈Q, r<s: $a^r<a^s$ ⇔ a>1, $a^r>a^s$ ⇔ a<1.

#Bew: s-r>0, $1^{s-r}=1$. a>1 $\underset{S1.9.7}{\Leftrightarrow}$ $a^{s-r}>1$ ¿ a<1 $\underset{S1.9.7}{\Leftrightarrow}$ $a^{s-r}<1$ ⇒

a>1 ⇔ $\frac{a^s}{a^r}>1$ ⇔ $a^s>a^r$ ¿ a<1 ⇔ $\frac{a^s}{a^r}<1$ ⇔ $a^s<a^r$

D1.9.4(1157)

(.) Sei eine natürliche Zahl n≥2 gegeben. Nach Vorstehendem schließen wir, dass die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^n$ auf [0, ∞) definiert ist. Wir nennen sie die nte Wurzelfunktion und schreiben auch $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ für die nte Wurzel einer Zahl x≥0. Diese Definition stimmt für n=2 mit der früheren Quadratwurzel überein.

#(..)a>0, r=p/q, p,q∈N, $a^r:=\sqrt[q]{a^p}$, $a^{-r}:=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Bem: 1.) Def (..) eindeutig, d.h. a^r ändert seinen Wert nicht, wenn r=p/q durch Erweitern oder Kürzen zu anderen natürlichen Zahlen übergeht

A1.10.9 Zeige, dass die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden Funktion ebenfalls streng monoton wachsend ist,

A1.10.10 Finde heraus, für welche n∈N die Abb $x \mapsto x^n$ auf ganz R bijektiv ist, sodass sich die nte Wurzelfunktion auch für negative x definieren läßt.