Analysis

(1)0 Vorbemerkungen

(1)0.0 Abkürzungen, Vorbemerkungen, Beweismethoden

Abkürzungen, soweit sie sich nicht aus dem Zusammenhang erklären:
$\forall$:für alle $\exists$: es existiert $\exists_1$: es existiert genau ein

Vor.: Voraussetzung Beh.: Behauptung Lös:Lösungen
Bew : Beweis Bez: Bezeichnung baf: beliebig, aber fest
Dx.x.x: Definitionx.x.x
Sx.x.x:Satz x.x.x (xxxx): Seite xxxx

$^\wedge$ logische UND Verküpfung
$^\vee$ logische ODER Verküpfung (evt enthält der Text noch unkorrigierte Verwechslungen von $^\wedge$ und $^\wedge$, sollte aus dem Kontext ersichtlich sein)
#....#:eigene Überlegungen

//kursiv// : kursiver Inhalt zum Ersparen des Zurückblätterns! Falls doch: Seitennr in Klammern.

Fast alle Lemmas oder Hilfssätze habe ich als Sätze bezeichnet. Das wird evt nochmals überarbeitet und rückgängig gemacht.
Manche Aufgaben habe ich ohne Lösungen aufgenommen.
Mengen in Großbuchstaben K,R,M…
b_x bedeutet meist, dass b von x abhängt
‾‾‾‾‾ Hinweise auf Strukturen in den Gedankengängen

Beweismethoden
1.Aufgabe:
Gegeben seien 2 Aussagen A und B Es soll die Implikation A $\Rightarrow$ B,
d.h. ein Satz mit Vor. A und Beh. B bewiesen werden.
Sprechweise: Aus A folgt B, oder A impliziert B, oder
A ist hinreichend für B, oder B ist notwendig für A
(denn, wenn B nicht gilt, dann kann A auch nicht gelten)
Schema: Satz Vor. A, Beh. B, Beweis.

a)Direkter Beweis
Man leitet aus A, mittels früher bewiesener wahrer Aussagen,
B direkt aus A her.

Definitionen und Sätze für Schritte zu folgenden Bsp werden erst später behandelt. Die Schritte sind aber trotzdem aus „Schulwissen“ einleuchtend.
Es kommt hier nur auf das Verstehen der Beweismethoden an.

b) Indirekter Beweis
Man leitet aus der Negation von B die Negation von A her:
$\neg B \Rightarrow \neg A$ ist logisch äquivalent mit $A \Rightarrow B$.

c) Widerspruchsbeweis
Ausgehend von den Aussagen A und $\neg B$ leitet man einen Widerspruch zu bereits bewiesenen (wahren!) Aussagen her.
Also kann $\neg B$ nicht wahr sein, d.h. B ist wahr (tertium non datur)

Aufgabe:
Gegeben seien 2 Aussagen A,B. Es soll die Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ bewiesen werden. A ist äquivalent zu B, A gilt genau dann, wenn B gilt , A ist notwendig und hinreichend für B.

d) $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ (wie bei 1.)Aufgabe)

e) Man zeige über Zwischenaussagen $A_1, \ldots A_n$ (die wahr sind!)
$A \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \ldots A_n \Leftrightarrow B$
Bsp: siehe Bew. zu $f^{-1}(\bigcup_{M \in S} M) = \bigcup_{M \in S} f^{-1}(M)$ Seite 20
Bem: $(A \Rightarrow B \; ' \; \neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$
f) Beweis durch Induktion siehe P1.5

0.1 Mengen (3)

D0.1.1 (3)
Zusammenfassung M, von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Bem: bestimmt → für jedes Objekt muß entscheidbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht
wohlunterschieden → jedes Objekt kommt höchstens 1x in M vor

Obige Definition ist unbefriedigend, wird aber im folgenden benutzt, da eine genauere axiomatische Begründung der Mengenlehre den Rahmen sprengen würde.
Bez: $x \in M \Leftrightarrow$ Objekt x ist Element von M
$x \notin M \Leftrightarrow$ Objekt x ist kein (nicht) Element von M.
Niemals gilt $M \in M$

D0.1.2 (3)
M_1 und M_2 heißen gleich, $M_1 = M_2 :\Leftrightarrow$
Beide Mengen bestehen aus den gleichen Objekten, oder $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$
($\Leftrightarrow$ genau dann, wenn)
Bem: Eine Menge kann definiert sein durch
1.) eine Aufzählung ihrer Elemente, z.B. $M = \{a, b, c, \ldots, z\}$ oder
2.) durch Charakterisierung, bzw Beschreibung ihrer Elemente x durch eine Eigenschaft E(x):
$M = \{x \mid E(x)\} = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E(x)\}$

Im folgenden betrachten wir nur Mengen, deren Elemente mathematische Objekte sind, die jeweils zu einer festen Grundmenge gehören.

D0.1.3(3)

1.) Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge $\emptyset$

2.) Eine Menge M_1 ist Teilmenge einer Menge M_2 :$\Leftrightarrow$
$\forall\ x \in M_1$ gilt $x \in M_2$ oder $\forall\ x \in M_1$: $x \in M_2$ oder $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$
Bez: $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \supset M_1$

3.) M_1 heißt echte Teilmenge von M_2 :$\Leftrightarrow$ $M_1 \subset M_2$ und $M_1 \neq M_2$
Bez: $M \subsetneqq M_2$.

Bem: 1.) Für 2 Mengen M_1, M_2 gilt $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ <u>und</u> $M_2 \subset M_1$
2.) Für 2 beliebige Mengen M_1 und M_2 braucht <u>nicht</u> $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \subset M_1$ zu gelten.

Folgerungen: Für Mengen M_1, M_2, M_3 gilt
1.) $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$ kurz $M_1 \subset M_2 \subset M_3$ Transitivität $\Rightarrow M_1 \subset M_3$
2.) $M_1 \subset M_1 \Rightarrow$ Reflexivität
3.) $\emptyset \subset M_1$

(4)D0.1.4(4)

Seien M_1, M_2 Mengen, dann heißt

1.) $M_1 \cup M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die Vereinigung von M_1 und M_2
Allgemeiner: Sind A_j, für $j \in J$, beliebig viele Mengen, so ist deren Vereinigung $\cup_{j \in J} A_j = \{x : \exists\ j \in J, \text{ mit } x \in A_j\}$
(J Indexmenge entsprechend der Zahl der Mengen)

2.) $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der Durchschnitt von M_1 und M_2
Allgemeiner: Sind A_j, für $j \in J$, beliebig viele Mengen, so ist deren Durchschnitt $\cap_{j \in J} A_j = \{x : x \in A_j\ \forall j \in J\}$

3.) $M_1 \backslash M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ die Differenz von M_1 und M_2 oder das Komplement von M_2 relativ zu M_1

4.) M_1 und M_2 disjunkt :$\Leftrightarrow$ $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

D0.1.5 (5)

Ist $M_1 \subset M_2$, so heißt $M_1^C := M_2 \backslash M_1$ das Komplement von M_1 in M_2 oder von M_1 bzgl M_2 (Ober-, Grundmenge M_2 muß bekannt sein)

D0.1.6(5)

Ist M eine Menge, so heißt $\mathrm{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M
(= eine Menge von Mengen oder Menge aller Teilmengen von M, d.h. Elemente von $\mathrm{P}(M)$ sind Teilmengen von M)

D0.1.7(5)
Sind M_1 und M_2 Mengen, so heißt die Menge $M_1*M_2 := \{(x,y) \mid x\in M_1 \text{ und } y\in M_2\}$ das kartesische Produkt von M_1 mit M_2 (=Menge aller geordneten Paare (x,y) aus $x\in M_1$, $y\in M_2$)
Beachte:Bei den Paaren kommt es auf die Reihenfolge an. $(a,b)\neq(b,a)$, außer a=b

Allgemein: $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1*A_2*\ldots*A_n := \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\ldots,n\}$

Falls ein $A_i=\emptyset \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$

Sind alle A_i gleich, ist das n-fache kartesische Produkt $A^n := \prod_{i=1}^{n} A$

Bem:1.) $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in M_1xM_2$. Dann gilt $(x_1,y_1)=(x_2,y_2) :\Leftrightarrow x_1=x_2$ und $y_1=y_2$
2.) $(x,y)\neq(y,x)$ für $x,y\in M_1xM_2$, $x\neq y$

c)(.)Wenn $A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$, so $A_1*A_2\subset B_1*B_2$;
(..)im Falle $A_1*A_2\neq\emptyset$ gilt auch die Umkehrung
(d.h., wenn $A_1*A_2\subset B_1*B_2$, so $A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$.
(..)Zusätzlich sei $A_1*A_2\neq\emptyset$
Z.z. $A_1*A_2\subset B_1*B_2 \Rightarrow A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$:

Rechenregeln,Folgerungen zu Mengen(8)
1.)Für jeweils beliebige Mengen M_1, M_2, M3 gelten die
a)Kommutativgesetze
$M_1\cup M_2 = M_2\cup M_1$ $\quad$ $M_1\cap M_2 = M_2\cap M_1$

b)Assoziativgesetze
$(M_1\cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2\cup M_3)$, $\quad$ $(M_1\cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2\cap M_3)$

c)Distributivgesetze
$M_1 \cap (M_2\cup M_3)=(M_1\cap M_2) \cup (M_1\cap M_3)$, $\quad$ $M_1 \cup (M_2\cap M_3)=(M_1\cup M_2) \cap (M_1\cup M_3)$

2.)Für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt
a) $M_1\cup M_2 = M_2 \Rightarrow M_1\subset M_2$
Bew:A0.1.1
b) $M_1\cup\emptyset = M_1$, $\quad M_1\cap\emptyset = \emptyset$
c) $M_1\subset M_2 \Rightarrow (M_1{}^C)^C = M_1$
d) $(M_1\cup M_2)^C = M_1{}^C \cap M_2{}^C$ $\quad$ $(M_1\cap M_2)^C = M_1{}^C \cup M_2{}^C$ Morgansche Regeln

Allgemeiner:
Sind A_j,für $j\in J$, eine beliebige Anzahl von Teilmengen einer festen Grundmenge X, so gelten:
$X/(\cup_{j\in J} A_j) = \cap_{j\in J} (X\backslash A_j)$, $X\backslash(\cap_{j\in J} A_j) = \cup_{j\in J} A_j (X\backslash A_j)$
Das Komplement einer Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplemente....

e) $M_1\subset M_2 (\subset M_3) \Leftrightarrow M_2^C \subset M_1^C$.
Bem:Dualitätsprinzip. Bei Komplementbildung finden folgende Vertauschungen statt:
$\cup\to\cap$, $\cap\to\cup$, $\subset\to\supset$, $\supset\to\subset$, $M\to M^C$, $M^C\to M^{C\,C}=M$.

D0.1.8(10) Sei $S\neq\emptyset$ ein System von Mengen (= Menge von Mengen),
dann heißt

1.) die Menge $\bigcup_{M\in S} M := \{x \mid \exists\ M\in S:\ x\in M\}$
die Vereinigung aller Mengen aus S
2.) die Menge $\bigcap_{M\in S} M := \{x \mid \forall\ M\in S:\ x\in M\}$
der Durchschnitt aller Mengen aus S
3.) das System S (paarweise) disjunkt:$\Leftrightarrow$
$\forall\ M_1, M_2\in S,\ M_1\neq M_2 :\ M_1\cap M_2 = \emptyset$

Bem: Die Morgan'schen Regeln gelten für beliebige $\cup\ \cap$, d.h., falls für ein System von Mengen $S\neq\emptyset$ und eine Menge $\overline{M}$ gilt: $M\subset\overline{M}$:
$\forall\ M\in S$ (.) $(\bigcup_{M\in S} M)^C = \bigcap_{M\in S} M^C$, (..) $(\bigcap_{M\in S} M)^C = \bigcup_{M\in S} M^C$

RR 2c) $M_1\subset M_2 \Rightarrow (M_1^C)^C = M_1$

Bem: $S=\emptyset$: $\bigcup_{M\in S} M := \emptyset$

0.2 (100) **Relationen, Funktionen**

D0.2.1 (100) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Jede Teilmenge $R\subset X\times Y$ heißt eine Relation der Menge X zur Menge Y

Bez: $x \overset{R}{\sim} y$ oder $xRy :\Leftrightarrow (x,y)\in R$ x steht in Relation zu y bzw
$x\not R y :\Leftrightarrow (x,y)\notin R$ (manchmal nur $x\sim y$)
Falls X=Y heißt $R\subset X\times X = X^2$ Relation in oder auf X

D0.2.2 (100)
1.) Eine Relation R auf X (d.h. $R\subset X\times X$) heißt,
reflexiv: $\Leftrightarrow \forall\ x\in X$ gilt xRx (d.h. $(x,x)\in R$) *D0.2.3 (105)*
symmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\ x,y\in X$ mit $xRy \Rightarrow yRx$
(d.h. $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$)
antisymmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\ x,y\in X$ mit xRy und $yRx \Rightarrow x=y$
(d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,x)\in R) \Rightarrow x=y$)
transitiv: $\Leftrightarrow \forall\ x,y,z\in X$ mit xRy und $yRz \Rightarrow xRz$
(d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$)

2.) Eine Relation R auf X heißt Äquivalenzrelation (ÄR): $\Leftrightarrow$
R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv
3.) Ist R eine ÄR auf X, so heißt für jedes $x\in X$ die Menge
$X_{|R} := \{y\in X \mid yRx\} = \{y\in X \mid (x,y)\in R\}$ eine Äquivalenzklase (ÄK) von x bzgl R. Jedes $y\in x_{|R}$ heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

S0.2.1(103)

Vor: Sei X beliebige Menge $\neq\emptyset$, dann gilt

1.) Ist R eine ÄR in/auf X, so ist die Menge aller ÄK von R eine Partition von X (d.h. X ist die Vereinigung von paarweise disjunkten ÄK$\neq\emptyset$, oder X ist in disjunkte ÄK $\neq\emptyset$ zerlegt: $X=\bigcup_{x\in X}(x|_R)$).

Andere Formulierung:

Ist R eine ÄR auf X, dann bildet die Menge aller ÄK eine Partition auf X, d.h. X ist in paarweise disjunkte ÄK $\neq\emptyset$ zerlegt, sodaß 2 Elemente aus X genau dann äquivalent sind, wenn sie in derselben Teilmenge liegen.

2.) Ist $\bigcup_{M\in S} M$ eine Partition von X mit $M\neq\emptyset$ und definiert man eine Relation (zunächst keine ÄR) auf X folgendermaßen: $xRy \Leftrightarrow \exists\, M\in S$ mit $x,y\in M$, so ist R eine ÄR auf X und $S\subset(\mathcal{P}(X))$ ist genau die Menge aller ÄK bzgl R

Andere Formulierung:

Umkehrung von 1.): Durch jede Partition von X wird eine ÄK definiert, wobei $x \overset{R}{\sim} y$, wenn x und y in derselben Teilmenge der Partition liegen.

D0.2.3(106)

1.) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Eine (eindeutige) Abbildung oder Funktion f von X in Y oder von X nach Y ist eine Relation von X zu Y ($f\subset X\times Y$) mit der Eigenschaft:

$\forall\, x\in X$: $\exists$ genau ein ($\exists_1$) $y\in Y$ mit $(x,y)\in f$

Bez: $f:X\to Y$, $y=f(x)$, $x\mapsto y=f(x)$=das Bild von x unter der Abb f:

$X^Y:=\{f|f:X\to Y\}$=Menge aller Abb. $f: X\to Y$

Wir schreiben für das y mit $x \overset{R}{\sim} y$:$y=f(x)$ und $f:X\to Y$ mit $x\mapsto y=f(x)$ für die Abbildung, kurz f oder f().

2.) Zwei Funktionen f_i: $X_i\to Y_i$ $i=1,2$ heißen gleich:$\Leftrightarrow$

$X_1=X_2$ und $Y_1=Y_2$ und $f_1(x)=f_2(x)$ $\forall$ $x\in X_1$

Bez: $f_1=f_2$ oder $f_1=f_2$ auf $X_1(=X_2)$

Bem: Gilt $f_1=f_2$ so ist $G(f_1)=G(f_2)$ (G...Graph).

3.) Bei geg Funktion f: $X\to Y$ heißt

a) X der Definitionsbereich von f

b) Y der Wertebereich oder Wertevorrat oder Bildbereich von f

c) $G(f):=\{x,f(x)|x\in X\}= f\subset X\times Y$ der Graph von f oder

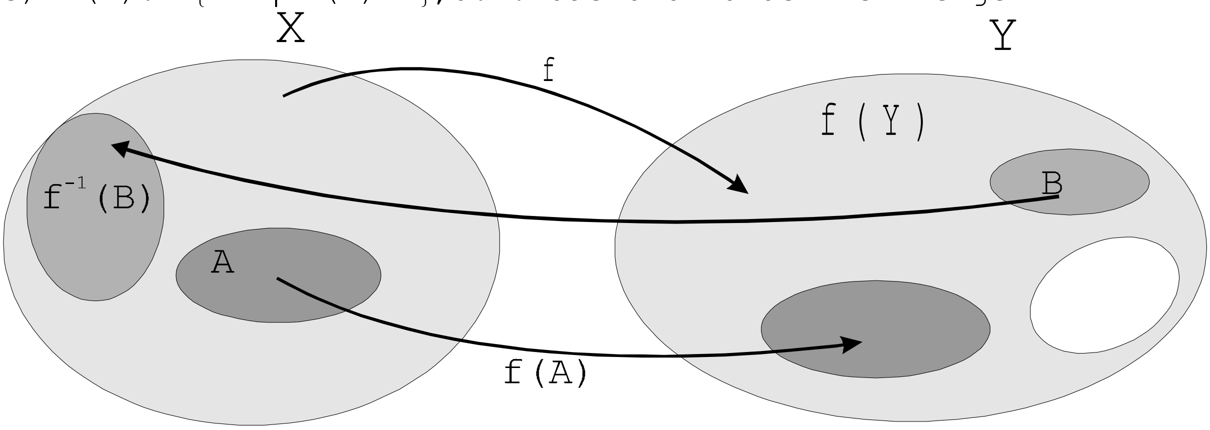
$R=\text{graph } f=\{x,f(x)|x\in X\}\subset X\times Y$

d) $f(A):=\{f(x)|\ x\in A\}$ das Bild der Teilmenge $A\subset X$ unter f.

$(=\{y\in Y|\ \exists\ x\in A: y=f(x)\})$, $(x,y)\in f$.

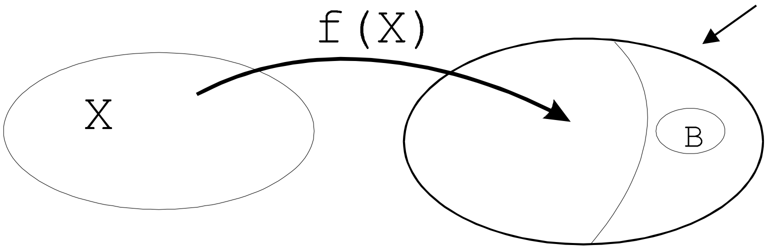
f(X): Wertemenge von f=Im(f), $f\subset Y$

e) $f^{-1}(B) := \{x\in X \mid f(x)\in B\}$, d.h. das Urbild der Teilmenge $B\subset Y$



Für $A\subset X$ bzw. $B\subset Y$ bilden wir die Menge aller Urbilder bzw. Bilder von Elementen aus A bzw. B, d.h. $f(A)=\{f(x)\in Y : x\in A\}$, $f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$
Falls B nur ein Element hat, etwa b, schreiben wir auch $f^{-1}(b)$ anstatt $f^{-1}(B)$. Beachte aber, daß $f^{-1}(b)$ mehrere, evtl sogar unendlich viele Elemente haben kann (* weil für mehrere $x\in X$ $f(x)=y\in B$ sein kann)
Bem: Für $f: X\to Y$ gilt

1.) $f(A)=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset$
2.) $f^{-1}(B)=\emptyset \Leftrightarrow B\subset Y\setminus f(X)$ Y…(das ganze «Ei»)



3.) $x_1=x_2\in X \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

\# $f(x_1)$
\# x das ist keine Funktion, da nicht $\exists_1$ $y\in Y$...gilt
\# $f(x_2)$
\#
\# x_1
\# $f(x_1)=f(x_2)$ das ist eine Funktion
\# x_2

Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f (108)

a) (.) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)\quad \forall\ A,B\subset X$ (..) $f(\bigcup_{M\in S} M)=\bigcup_{M\in S} f(M)\quad \forall\ M\subset X$

(..) $y\in f(\bigcup_{M\in S} M) \Leftrightarrow \exists\ x\in \bigcup_{M\in S} M : y=f(x) \Leftrightarrow \exists\ M\in S$ und $\exists\ x\in M: y=f(x)$
$\Leftrightarrow \exists\ M\in S: y=f(M) \Leftrightarrow y\in \bigcup_{M\in S} f(M)$

b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\quad \forall\ A,B\subset X$,
$f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap_{M\in S} f(M)$, $M\subset X$
sonstiges: $A,B\subset X, A\cap B=\emptyset$ und $f=const, X\neq\emptyset \Rightarrow f(A\cap B)=\emptyset,\ f(A)\cap f(B)\neq\emptyset$

c) $f^{-1}(A \cup\cap B) = f^{-1}(A) \cup\cap f^{-1}(B) \quad \forall A,B \subset Y,$

Andere Formulierung :
Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. Die Mengen A_1, A_2 seien Teilmengen
$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(..) $f^{-1}(M¿) = f^{-1}(M)$ $M \subset Y$

D0.2.4(200) Eine Abbildung(Funktion) $f: X\to Y$ heißt
1.) injektiv(eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow$ $\forall\ x_1,x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h jedes $y\in Y$ hat max 1 Urbild $x\in X$ mit $y=f(x)$, d.h. aus $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
2.) surjektiv (Surjektion) (Abb von X auf Y): $\Leftrightarrow$ $Y=f(X)$, (d.h. für $\forall\ y\in Y\ \exists$ mindestens ein $x\in X$: $y=f(x)$), d.h.Wertebereich nicht zu groß gewählt
3.) bijektiv oder Bijektion: $\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv
Zu jedem $y\in Y$ gibt es genau ein $x\in X$ mit $f(x)=y$.
In diesem Fall heißt die Funktion/Abb. $f^{-1}:Y\to X$ definiert durch $f^{-1}(y):=x$ für $y=f(x)$ die Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu f, $y\mapsto x$, wobei x dasjenige Element aus X sei, für das $y=f(x)$ gilt.
Eine Bijektion $f: X\to X$ heißt Permutation von X

Bem:1.) Falls f nicht bijektiv, so existiert keine Umkehrfunktion auf Y
2.) Achtung: $f^{-1}(B)$ Urbild ist verschieden von $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion

L0.2.1(201) Vor: X endliche Menge. $f: X\to X$ eien Abbildung
Aussage: a) f injektiv b) f surjektiv c) f bijektiv sind äquivalent.

S0.2.2(201)
Es sei eine bijektive Abbildung $f:X\to Y$ mit Umkehrfunktion $f^{-1}:Y\to X$ gegeben, dann gilt:
$f^{-1}(f(x))=x \quad \forall\ x\in X$ und $f(f^{-1}(y))=y \quad \forall\ y\in Y$

D0.2.5(202) Seien $f: X\to Y$ und $g:Y\to Z$ vorgegeben, dann heißt die Abb. $g\circ f: X\to Z$ definiert durch $x\mapsto g(f(x)) \quad \forall\ x\in X$ die zusammengesetzte oder

Bem:1.) Die Komposition ist assoziativ, aber nicht kommutativ:
$(h\circ g)\circ f = h\circ (g\circ f) \qquad f\circ (g\circ h) = (f\circ g)\circ h$
$g\circ f \neq f\circ g$ (siehe auch A0.2.15 S 205)
2.) Sind $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ bijektive Abb, dann ist auch $g\circ f:X\to Z$ bijektiv und die Umkehrfunktion $(g\circ f)^{-1}:Z\to X$ ist gegeben durch $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

D0.2.6(203) Seien X,Y beliebige Mengen $\neq\emptyset$ und $A\subset X$ und Funktionen gegeben
$f: X\rightarrow Y$ $g: A\rightarrow Y$, dann heißt

1.) $id_x: X\rightarrow X$ mit $x\mapsto x\ \forall\ x\in X$ die Identität auf X oder identische Abb. auf X
2.) g die Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A:$\Leftrightarrow$
$g(x)= f(x)\ \forall\ x\in A$. Bez: $g=f|_A$
3.) f eine Fortsetzung von g von A auf X: $\Leftrightarrow$ $g= f|_A$ von A auf X
4.) Wenn eine Funktion $f:X\rightarrow Y$ bijektiv, dann gilt $f^{-1}\circ f=id_x$
und $f\circ f^{-1}=id_Y$

Bem: 1.) id_x ist bijektiv und $id_x^{-1} = id_x$
2.) $f: X\rightarrow Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f(A)\cap f(B) = f(A\cap B)\ \forall A,B\subset X$
3.) $f: X\rightarrow Y$ bijektiv $g: Y\rightarrow Z$ bijektiv $\Rightarrow$

Andere Formulierung:
//D0.2.6 (203) $X,Y\neq\emptyset$ & $A\subset X$ & $f: X\rightarrow Y$ $g: A\rightarrow Y$ //
1.) $id_x: X\rightarrow X$ mit $x\mapsto x\ \forall\ x\in X$

S0.2.4 (206)
a) Sei $f: X\rightarrow Y$ umkehrbar (invertierbar), dann ist die inverse Abbildung g eindeutig bestimmt.
b) $f: X\rightarrow Y$ ist invers (umkehrbar) $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv