1(300) Axiomatische Einführung der reellen und komplexen Zahlen

1.1(300) Gruppen und Körper

D1.1.1(300)
Eine Verknüpfung ordnet durch eine Vorschrift Elementen einer Menge, Elemente genau dieser Menge zu. Dadurch entsteht ein Verknüpfungsgebilde.

Zweistellige innere Verknüpfung einer Menge:
- Menge M, mit einer auf ihr definierten Verknüpfung. Symbol: $\circ$
- $M\neq\emptyset$
- $M\times M\to M$: $a,b\in M$ wird $a\circ b\in M$ zugeordnet.

Schreibweise $(M,\circ)$

D1.1.2 (301)
a) Kommutatives Verknüpfungsgebilde
$\forall\ a,b\in M$ gilt $a\circ b=b\circ a \Leftrightarrow$ $(M,\circ)$ heißt kommutatives Verknüpfungsgebilde
b) Assoziatives Verknüpfungsgebilde
$\forall\ a,b\in M$ gilt $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)\Leftrightarrow$
$(M,\circ)$ heißt assoziatives Verknüpfungsgebilde
c) Verknüpfungsgebilde mit Existenz von neutralen Elementen
Vor: $n\in M$, $(M,\circ)$
Aussage: n heißt neutrales Element in $(M,\circ)\Leftrightarrow$
$\forall\ a\in M$ gilt $a\circ n=n\circ a=a$
d) Verknüpfungsgebilde mit Existenz von inversen Elementen
Vor: $a,n\in M$, $(M,\circ)$, (n neutrales Element)
Aussage: In $(M,\circ)$ heißt $a'\in M$ inverses Element von a $\Leftrightarrow$
$a\circ a'=a'\circ a=n$

D1.1.3(302) Menge $M_H\neq\emptyset$ ist Halbgruppe $\Leftrightarrow$
(HG1) Zweistellige innere Verknüpfung $(M_H,\circ)$ nach D1.1.1
($a,b,\ldots \in M_H$, $(a\circ b)\circ c \ldots \in M_H$)
(HG2) $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ $\forall\ a,b,c\in M_H$ (Assoziativgesetz)
Bem: Jede Gruppe (siehe D1.1.4) ist eine Halbgruppe

D1.1.4 (302) Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung $\circ$
(z.B +, * usw)
$G\times G\to G$, $G\circ G\to G$, $(a,b)\to a\circ b$,
sodass folgende Axiome $\forall\ a,b,c\in G$ erfüllt sind:
(G1) Assoziativgesetz $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$
(G2) $\exists$ neutrales Element $e\in G$, $a\circ e=a$
(G3) $\forall\ a\in G$ $\exists$ Inverses Element $a'\in G$: $a\circ a'=e$
(G4a) Gruppe G heisst abelsch, falls G Gruppe und $a\circ b=b\circ a$ $\forall\ a,b\in G$

Bem: Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G

L1.1.1 (304) Sei G Gruppe
a) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt
b) Es gilt $e\circ a=a\circ e=a$ $\forall\ a\in G$

c) Zu gegebenem $a \in G$ ist das Inverse eindeutig bestimmt
d) Es gilt $a' \circ a = e$ (nicht nur $a \circ a' = e$)
e) $(a^{-1})^{-1} = a$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

D1.1.5 (304) $H \in G$ heißt Untergruppe, falls H mit der Verknüpfung von G selbst eine Gruppe ist.

L1.1.3 (304) H Untergruppe von G
a) Das neutrale Element von H ist das von G
b) Ist $h \in H$, so ist $h^{-1} \in H$ und ist das Inverse bzgl H

D1.1.6 (306) Vor: Menge $M_R \neq \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
$\oplus: M_R x M_R \to M_R$ und $\otimes: M_R x M_R \to M_R$
$(M_R, \oplus, \otimes)$ ist ein Ring
$\Leftrightarrow$
es gelten für folgende Axiome:

- $(M_R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe
  - (R1⊕) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \in M_R$, $\forall\ a,b,c \in M_R$
  - (R2⊕) $\exists\ e \in M_R : a \oplus e = a\ \forall\ a \in M_R$
  - (R3⊕) $\exists\ e, a' \in M_R : a \oplus a' = e\ \forall\ a \in M_R$
  - (R4⊕) $a \oplus b = b \oplus a \in M_R$, $\forall\ a,b \in M_R$
- •• $(M_R, \otimes)$ ist Halbgruppe
  - (R1⊗) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \in M_R$, $\forall\ a,b,c \in M_R$
  - (R2⊗) $\exists\ n \in M_R$, $n = e$ oder $n \neq e$: $a \otimes n = n \otimes a = a\ \forall\ a \in M_R$
- ••• (RD⊕⊗) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b + a \otimes c \in M_R\ \forall\ a,b,c \in M_R$
  $(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c \in M_R\ \forall\ a,b,c \in M_R$

D1.1.7 (306) Vor: $K \neq \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
$\oplus: KxK \to K$ und $\otimes: KxK \to K$
$(K, \oplus, \otimes)$: ist ein Körper
$\Leftrightarrow$
Gruppe, wegen (K4⊕) abelsch
(K1⊕) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \in K$, $\forall\ a,b,c \in K$
(K2⊕) $\exists$ genau ein Element $n \in K$ mit $a \oplus \underbrace{0}_{\text{oder } e} = a\ \forall\ a \in K$
(K3⊕) $\forall\ a \in K\ \exists$ genau ein $-a \in K$ mit $a \oplus \underbrace{(-a)}_{\text{oder } a'} = \underbrace{0}_{\text{oder } e}$
(K4⊕) $a \oplus b = b \oplus a \in K\ \forall\ a,b \in K$
(K1⊗) Assoziativgesetz für ⊗: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c\ \ \forall\ a,b,c \in K$
(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:
$\exists$ genau ein Element $n \in K$ mit $\underbrace{1}_{\text{oder } n} \neq 0$ und $a \otimes n\ \underbrace{1}_{\text{oder } n} = a\ \forall\ a \in K$
(K3⊗) Existenz des bzgl ⊗ inversen Elements
$\forall\ a \in K \backslash \{0\}$, $\exists$ genau ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a \otimes a^{-1} = \underbrace{1}_{\text{oder } n}$
(K4⊗) Kommutativgesetz bzgl ⊗: $a \otimes b = b \otimes a\ \forall\ a,b \in K$
(KD⊕⊗) Distributivgesetz für ⊕ und ⊗: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Bezeichnung: rot korrespondiert mit Ring, blau zeigt Unterschied zum Ring

Beachte, dass das Ergebnis von ⊕ oder ⊗ per Definition wieder zu K gehören muss. Wir sagen auch: ein Körper ist immer abgeschlossen bezgl ⊕ und ⊗. Sind die beiden Abbildungen Addition bzw Multiplikation, dann sind die Elemente des Körpers Zahlen. Jeder derartige Körper K enthält mindestens 2

Zahlen, nämlich 0 und 1 und es gibt einen Körper, der genau aus diesen Zahlen besteht:

Bem:1.) (K1⊕),(K2⊕),(K3⊕) bedeutet bzgl ⊕: $(K,\oplus)$ ist Gruppe, die wegen (K4⊕) Abel'sch ist.
(K1⊗),(K2⊗),K3⊗) bedeuten, $(K\setminus\{0\},\otimes)$ ist Gruppe, die wegen(K4⊗) Abel'sch ist

2.) Lässt man in (K2⊕) die Eindeutigkeit von 0 weg, so folgt diese aus (K4⊕):

3.) Lässt man in (K3⊕) die Eindeutigkeit von $-a$ weg, so folgt diese aus (K1⊗),(K2⊗),(K4⊕):

4.) Analog folgt in (M2) die Eindeutigkeit der 0 mit (M4)und in (M3) folgt die Eindeutigkeit von a^{-1} für $a\neq 0$ auch aus den anderen Axiomen (K1⊗),(K2⊗),(K4⊗) statt ⊕→⊗

Konventionen: $a\otimes b\oplus c\otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $\quad a-b := a\oplus(-b)$

$-a-b := (-a)\oplus(-b)$ $\quad \frac{a}{b} := a/b := a:b := a\otimes b^{-1}, b\neq 0$

b^{-1}:= inverses Element von b

5.) Ein Körper hat mindestens die Elemente 0 und 1

(314) **Abgeleitete Rechenregeln (RR) in** K **:**

Sei K ein Körper. Dann gilt $\forall$ a,b,c

1.) $0\neq 1$

2.) $a\oplus 0=0\oplus a=a$, $a\oplus(-a)=(-a)\oplus a=0 \quad \forall a\in K$
$a\otimes 1=1\otimes a=a \quad \forall a\in K$, $a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a \quad \forall a\neq 0$

3.) $\forall a,b\in K\ \exists$ genau ein $x\in K$: $a\oplus x=b$ mit $x=b\oplus(-a)$

4.) (.) $-(-a)=a$, $-0=0$
(..) $-(a\oplus b)=-a-b$

4.) $\forall a,b\in K$, $a\neq 0$. $\exists$ genau ein $x\in K$: $a\otimes x=b$
nämlich $x=a^{-1}\otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)} =b\otimes a^{-1} \underset{\text{Konvention}}{=} b/a$

5.) $(a^{-1})^{-1}=a$, $(a\otimes b)^{-1}=a^{-1}\otimes b^{-1} \quad \forall a,b\in K,\ a,b\neq 0$

6.) $a\otimes b=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$. Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0 \quad \forall a\neq 0$

7.) ● $(-1)\otimes a=-a$, ●● $-(a\otimes b)=(-a)\otimes b=a\otimes(-b)$

8.) ● $a\otimes(b\oplus(-c))=a\otimes b\oplus(-a\otimes c)$, ●● $a\otimes c=a\otimes b,\ a\neq 0 \Rightarrow c=b$

9) $(-a)\otimes(-b)=a\otimes b$

10.) $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a\otimes d\oplus c\otimes d}{b\otimes d} \quad \forall a,b,c,d\in K,\ b,d\neq 0$

$\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}=\frac{a\otimes c}{b\otimes d}$ folgt aus (K4⊗) $b,d\neq 0$

D1.1.8 (325) Die Charakteristik von Körper K
char(K)=das kleinste $m\in\mathbb{N}$ mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\,mal}=0$ falls es dieses m gibt.

Falls es dieses m nicht gibt, gelte char(K)=0

S1.1.1 (321) $\operatorname{char}(F_P=Z_{/P})=P$ (P eine Primzahl)

1.2(400) **Die Anordnungsaxiome**

Axiomatische Beschreibung einer linearen Anordnung aller Elemente eines Körpers

D1.2.1(400) Ein Körper (K,+,*) heißt angeordnet: ⇔ Auf K existiert eine Anordnungsrelation R:=<(„kleiner"), die folgende Eigenschaften (Anordnungsaxiome) erfüllt:

(O1) $\forall$ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:
a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie)
$\forall$ a,b∈K ((a,b))∈< oder (b,a)∈< oder a=b)
(O2)Aus a<b und b<c ⇒ a<c (Transitivität) $\forall$ a,b,c∈K
(a,b)∈< und (b,c)∈< ⇒ (a,c)∈<
(O3)a<b ⇒ a+c < b+c $\forall$ c∈K
a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c (Monotonie)
(a,b)∈<, (a+c, b+c)∈< $\forall$ c∈K
(a,b)∈< und (0,c)∈< ⇒ (a*c,b*c)∈< ⊂ KxK=K^2

Bezeichnungen, Sprechweisen a,b∈K
K angeordneter Körper:(K,+,*,<)<⊂ KxK=K^2
a kleiner b: ⇔ a<b,
a größer b: ⇔ b<a bzw a>b
a ist positiv(negativ): ⇔ 0<a bzw a>0 (a<0 bzw 0>a)
a ist kleiner oder gleich b: ⇔ a<b oder a=b, (a≤b,b≥a)
a ist größer oder gleich b: ⇔ a>b oder a=b, (a≥b)
a ist nicht negativ: ⇔ a≥0 0≤a

Andere Formulierung
Ein Körper K heißt geordnet wenn es eine Teilmenge P⊂K gibt,welche folgende Eigenschaften besitzt:
(P1) $\forall$ a∈K gilt genau eine der folgenden Aussagen:
a∈P oder -a∈P oder a=0
(P2) $\forall$ a∈P:a+b∈P
(P3) $\forall$ a,b∈P:ab∈P
Ist -a∈P, so heißt a negativ. Wir können also die Axiome (O1*)-((P3) wie folgt in Worte fassen: Ein beliebiges a∈K ist entweder positiv oder negativ oder =0, und Summe und Produkt von positiven Zahlen sind wieder positiv.
K_+⊂K: x≥0 $\forall$ x∈K_+
Weiter setzten wir noch:
a<b ⇔ b>a ⇔ b-a∈K_+ a≤b ⇔ b≥a ⇔ a=b oder a<b

(401)**(RR<):Abgeleitete Rechenregeln in einem angeordneten Körper**
1.)a<b ⇔ a-b<0 ⇔ b-a>0

2.) $a>b \Leftrightarrow -a<-b$, speziell $a>0 \Leftrightarrow -a<0$
3.) (.) $a,b>0 \Rightarrow ab>0$
(..) $a>0, b<0 \Rightarrow ab<0$,
(...) $a<0$ und $b<0 \Rightarrow ab>0$
4.) $a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, speziell $1>0, -1<0$
$1=1\cdot 1>0 \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} -1<0$ # da 2.) nur so $(\underbrace{-1}_{<0})*(\underbrace{-1}_{<0})$ stimmt)
5.) $a>0 \Leftrightarrow a^{-1}>0$, $a<0, a^{-1}<0$
6.) $a<b$ und $c<0 \Rightarrow ac>bc$
$-(ac)<-(bc) \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} ac>bc$
7.) $0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$
8.) $a=b$ genau dann, wenn $a\leq b$ und $b\leq a$
9.) $a<b \Rightarrow \forall \lambda\in K$ mit $0<\lambda<1$ gilt $a<a\lambda+(1-\lambda)b<b$

D1.2.2(407) Sei $K=(K,+,^*,<)$ ein angeordneter Körper und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$.
Ein Element $\overline{m}\in T$ heißt das Maximum von T ($\overline{m}=\max T$) :⇔ $\forall t\in T$ gilt $t\leq\overline{m}$
Ein Element $\underline{m}\in T$ heißt das Minimum von T ($\underline{m}=\min T$) :⇔ $\forall t\in T$ gilt $\underline{m}\leq t$

Bem: 1.) Zu $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ muss kein maxT bzw minT existieren
2.) Sei $T_1\subset T_2\subset K$ und $\exists\ \overline{m}_i=\max T_i$, $i=1,2 \Rightarrow \overline{m}_1\leq\overline{m}_2$
Bew: $\overline{m}_1\in T_1\subset T_2 \Rightarrow \overline{m}_1\in T_2$
$\forall t\in T_2$: $t\leq\overline{m}_2 \underbrace{\Rightarrow}_{t=m_1} \overline{m}_1\leq\overline{m}_2$
Analog gilt $\exists\ \underline{m}_i=\min T_i$, $i=1,2 \Rightarrow \underline{m}_1\geq\underline{m}_2$
3.) Wenn für $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ maxT oder minT existiert, so ist dieses eindeutig.

D1.2.3(408) Sei K angeordneter Körper und $a\in K$ dann heißt
$|a|:=\max\{a,-a\}=\begin{cases} a \text{ falls } a\geq 0 \\ -a \text{ falls } a<0\end{cases}$ der Absolutbetrag von a
Bem: 1.) Offensichtlich existiert das max wie angegeben
2.) Für $a,b\in K$ heißt $d=|a-b|$ der Abstand von a und b

S1.2.1(408) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$
- Beh: 1.) $|a|=|-a|$
- 2.) $|a|\geq 0 \wedge |a|=0 \Leftrightarrow a=0$
- 3.) $|ab|=|a||b|$
- 4.) (.) $b\neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=|a|\cdot|b|^{-1}$, speziell (..) $|b^{-1}|=|b|^{-1}$
- 5.) $a=0 \Leftrightarrow |a|<\varepsilon\ \forall \varepsilon\in K$ mit $\varepsilon>0$
- 6.) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)
- 7.) $|a+b|\geq||a|-|b||\geq|a|-|b|$
- 8.) $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$
Linke Ungleichung heißt Dreiecksungleichung nach unten.

D1.2.4(412) Für $a\in R$ heißt

$$\text{sgn } a=\begin{cases} 1 \text{ für } a>0 \\ 0 \text{ für } a=0 \\ -1 \text{ für } a<0 \end{cases}$$ das Vorzeichen oder das Signum von a und

$$|a|=a * \text{sgn } a=\begin{cases} a \text{ fuer } a>=0 \\ -a \text{ fuer } a<0 \end{cases}$$ der Betrag von a

S1.2.2(412) $\forall$ a,b$\in$R gilt

1.) a=b $\Leftrightarrow$ |a|=|b| und sgn a=sgn b
2.) sgn(ab)=(sgn a)(sgn b), |ab|=|a||b|
3.) b$\neq$0 $\Rightarrow$ (sgn a)/(sgn b)=sgn(a/b), |a/b|=|a|/|b|

1.3(500) Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen

D1.3.1(500) Sei (K,<) angeordneter Körper T$\subset$K, T$\neq\emptyset$

1.) Ein Element $\bar{s}\in$K ($\underline{s}\in$K) ($\bar{s}$, $\underline{s}$ müssen nicht zu T gehören) heißt obere (untere) Schranke von T: $\Leftrightarrow$ $\forall$ t$\in$T gilt t$\leq\bar{s}$ (t$\geq\underline{s}$)
2.) T heißt nach oben (unten) beschränkt$\Leftrightarrow$ $\exists$ eine obere (untere) Schranke von T
3.) T heißt beschränkt:$\Leftrightarrow$ T ist nach oben und unten beschränkt.
4.) Ein $\overleftarrow{s}\in$K ($\underrightarrow{s}\in$K) heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von T (größte untere Schranke oder Infimum von T): $\Leftrightarrow$

α) $\overleftarrow{s}$ ($\underrightarrow{s}$) ist obere (untere) Schranke von T

β) $\overleftarrow{s}\leq\bar{s}$ $\forall$ oberen Schranken $\bar{s}$ von T ($\underrightarrow{s}\geq\underline{s}$ $\forall$ unteren Schranken $\bar{s}$ von T)

Bez: $\overleftarrow{s}$=supT ($\underrightarrow{s}$=inf T)

Andere Formulierung:

$$a=\sup A:\ \begin{cases} \forall\, x\in A: x\leq a \ \ d.h.\ a \text{ ist obereSchranke von } A \\ \forall\, c\in R: x\leq c\ \forall\, x\in A\Rightarrow a\leq c,\ d.h.\ a \text{ ist obereSchranke von } A \end{cases} \Leftrightarrow$$

a$\in$R ist kleinste obere Schranke von A

Bem: a$\in$T, z.B. T={t|t$\geq$a} $\Rightarrow$ a=inf T=min T
a$\notin$T, z.B. T={t|t>a} $\Rightarrow$ a=inf T$\neq$min T

Bez: 1.) Ist T$\subset$K nach oben/unten nicht beschränkt, so schreibt man supT:=∞ (infT:=-∞) (dann existiert supT/infT nicht)
2.) Für T=$\emptyset$ sei sup $\emptyset$:=-∞, inf T:=+∞

Bem: 1.) T$\subset$K ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ c$\in$K mit |t|$\leq$c $\forall$ t$\in$T
2.) Falls existent, sind sup T und inf T eindeutig bestimmt
3.) Sei T$\subset$K, T$\neq\emptyset$, $\exists$ sup T bzw inf T $\Rightarrow$
sup T = min$\{\bar{s}$ | $\bar{s}$ ist obere Schranke von T in K$\}$
inf T $\neq$ max$\{\underline{s}$ | $\underline{s}$ ist untere Schranke von T in K$\}$
d.h. sup T und inf T müssen nicht, können aber $\in$T sein.
Wenn sup T bzw inf T $\in$T, siehe S1.3.1 2.

S1.3.1(501) Vor.: Sei K angeordnet und T$\subset$K, T$\neq\emptyset$, s$\in$K

Beh: 1.) $\overleftarrow{s}$=sup T: $\Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und
β) $\forall$ ε>0 ist $\overleftarrow{s}$-ε keine obere Schranke von T
$\Leftrightarrow$ $\forall$ t$\in$T: t$\leq\overleftarrow{s}$ und $\forall$ ε>0 $\exists$ $t_\varepsilon\in$T mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$

2.) $\exists$ max T $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup$T\in K$ und sup$T\in T$: maxT=supT
$\exists$ min T $\Leftrightarrow$ $\exists$ inf $T\in K$ und inf$T\in T$: min T=inf T

D1.3.2(506)
Ein angeordneter Körper $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <):
$\forall\ T\subset K$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ sup $T\in K$.
Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der rellen Zahlen R

Bem:siehe auch A1.3.13.
$K=(K,+,\cdot,<)$ ist vollständig:
Jede nach unten beschränkte Menge $T\subset K$, $T\neq\emptyset$
besitzt ein Infimum inf T in K

D1.3.3(507) Seien $a,b\in R$, $a\leq b$, Dann sei
$[a,b]:=\{x\in R|\ a\leq x\leq b\}$ abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a,b
$(a,b]:=\{x\in R|\ a<x\leq b\}$, $a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
$[a,b):=\{x\in R|\ a\leq x<b\}$, $a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
$(a,b):=\{x\in R|\ a<x<b\}$, $a<b$ offenes Intervall
$(-\infty,b]:=\{x\in R|\ x\leq b\}$, $(-\infty,b):=\{x\in R|\ x<b\}$
$[a,\infty):=\{x\in R|\ x\geq a\}$, $(a,\infty):=\{x\in R|\ x>a\}$
$(-\infty,\infty):=R$ unbeschränkte Intervalle
Aus dem Zusammenhang muss sich ergeben, ob (a,b) offenes Intervall oder Paar von a und b ist.

S1.3.2(518)
Vor: $x\in R$, $x\geq 0$,.
Beh:$\exists$ genau ein $y\in R$ mit $y\geq 0$ und $y^2=x$
($y=:\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x)

Bem:
1.) Sei $[0,\infty)=\{x\in R|0\leq x\}$, dann ist $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definiert durch
$x\mapsto f(x)=x^2$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion ($0\leq x_1\leq x_2 \Rightarrow x_1^2\leq x_2^2$)
injektiv $f^{-1}: [0,\infty)\to[0,\infty)$ $x\mapsto\sqrt{x}$
$f: R_+\to R_+$, $x\mapsto x^2$ ist bij, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}:(y)=\sqrt{y}$
Quadratwurzelfunktion
2.) α) $a,b\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$
β) $0\leq a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$
γ) $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$
3.) Die Funktion $f:R_+\to R_+$, $x\mapsto x^2$ ist bijektiv,
d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ (Wurzelfunktion)

D1.3.4 (519)Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d: X\times X\to R$, heißt Metrik auf X, wenn für beliebige $x,y,z\in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:
1.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2.) Symmetrie: $d(x,y)=d(y,x)$
3.) Dreiecksungleichung: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

S1.3.3 (519) **Positive Definitheit**

$d: X \times X \to \mathbb{R} \Rightarrow d(x,y) \geq 0$

D1.3.5 (519)
(X,d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. (Manche Autoren fordern zusätzlich, dass $X \neq \emptyset$.
In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.)
Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.

1.4 (600) Funktionenräume, gerade/ungerade Funktionen, monotone Funktionen

D1.4.1 (600) Funktionenräume
Sei $D \neq \emptyset$. Für Abbildungen $f,g: D \to \mathbb{K}$ seien $f+g$, $f \ast g: D \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\forall\ x \in D: \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f \ast g)(x) = f(x) \ast g(x) \end{cases}, \quad \#\ f(x) = \underbrace{\alpha}_{\in K} : (f \ast g)(x) = \alpha \ast g(x)$$

Eine $f: D \to \mathbb{K}$, $x, -x \in D$ heißt
gerade $\Rightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall\ x \in D$
ungerade $\Rightarrow f(x) = -f(-x) \quad \forall\ x \in D$

Für $f: D \to \mathbb{K}$ sei $|f|: D \to \mathbb{R}$ definiert durch $|f|(x) = |f(x)| \quad \forall\ x \in D$.

$\exists\ K \in \mathbb{R}_+: |f(x)| \leq K \quad \forall\ x \in D \Leftrightarrow f$ heißt beschränkt

D1.4.2 (600) Für $f: D \to \mathbb{R}$ seien $|f|$, f^+, f^- definiert als
$|f|(x) = |f(x)|$, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \forall\ x \in D$.
Für $f,g: D \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \leq g$ falls $f(x) \leq g(x) \quad \forall\ x \in D$ gilt.
Wir nennen f nach oben beschränkt, falls ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x) \leq K \quad \forall\ x \in D$.
Analog heißt f nach unten beschränkt, falls $-f$ nach oben beschränkt ist. Falls beides gilt, ist f offenbar beschränkt im oben definierten Sinn.
Folgendes erst nach D1.3.1 lesen, siehe Hinweis dort.
Wir schreiben auch $\sup_{x \in D} f(x)$ statt $\sup f(D)$, und entsprechend $\inf_{x \in D} f(x)$, $\max_{x \in D} f(x)$, $\min_{x \in D} f(x)$, falls letztere existieren.

D1.4.3 (601) Monotone Funktionen
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt (auf D) monoton
Wachsend ↗ (fallend ↘), falls $x, y \in D$, $x < y \Rightarrow$
$f(x) \leq f(y)$, $(f(x) \geq f(y))$.
Falls sogar immer $f(x) < f(y)$, $(f(x) > f(y))$ gilt, heißt f streng monoton wachsend↑ (bzw. fallend ↓).
Beachte, dass streng monotone Funktionen immer injektiv sind.

1.5(700) **Die natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion**

D1.5.1(700)

1.) Eine Teilmenge $T\subset\mathbb{R}$ heißt induktiv: $\Leftrightarrow$

α) $1\in T$ und β) $t\in T \Rightarrow t+1\in T\ \forall\ t\in\mathbb{R}$

Bsp: $[1,\infty)$

\# Alle denkbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$: $(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$,
\# davon nur Menge I <u>aller</u> induktiven Teilmengen: $I\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R})$
\# T_i: nur <u>eine</u> induktive Teilmenge $T_i\in I$
\# Alle induktiven Teilmengen von I: $I=\bigcup\limits_{T\in I} T_i\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R})$

2.) Sei I die Menge aller induktiven Teilmengen T_i von $\mathbb{R}$ $(I\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, dann heißt $\mathbb{N}:=\bigcap\limits_{T_i\in I} T_i$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Bem: $\mathbb{R}\in I \Rightarrow I\neq\emptyset$ (siehe Körperaxiome)

Eigenschaften von $\mathbb{N}$:

1.) $\mathbb{N}$ ist induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

2.)(.) $\mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten $\Rightarrow$
(..) $\mathbb{N}$ ist kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

Bem: 1.) $0\notin\mathbb{N}$, da mit T_i auch $0\notin T_i\cap \underbrace{[1,\infty)}_{injektiv\ nach\ D1.5.1\ Bsp}$ eine induktive Menge ist, ($[1,\infty):=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\leq x\}$) und $\mathbb{N}\subset T_i\cap[1,\infty)$, $0\notin[1,\infty)$ gilt) und damit
$0\notin\bigcap\limits_{T\in I} T_i=:\mathbb{N}$

Bez: $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ist induktiv und heißt die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

Sei $A\subset\mathbb{N}$ so, daß $1\in A$ und der Schluss $x\in A \Rightarrow x+1\in A$ richtig sind (mit anderen Worten :A ist induktiv). Dann folgt bereits $A=\mathbb{N}$

Beh: a) $x<1 \Rightarrow x\notin\mathbb{N}$
b) $n\in\mathbb{N}$, $n<x<n+1 \Rightarrow x\notin\mathbb{N}$

S1.5.1(702) Prinzip der vollständigen Induktion

Vor: $\forall\ n\in\mathbb{N}$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es gelte

1.) "$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang: IAnf) und

2.) Wenn $\forall\ n\in\mathbb{N}$ (beliebige $n\in\mathbb{N}$) gilt „$\underbrace{A_{(n)}\text{ist wahr}}_{IndHyp:\ IHyp}$", folgt, dass auch

„ $\underbrace{A_{(n+1)} \text{ ist wahr}}_{IndAussage:\,IAuss}$ " ist, so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr ∀ n∈N

Bezeichnungen: ∀ n∈N gilt $\underbrace{\left(\underbrace{A_{(n)}}_{IH} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{Induktionsbehauptung}\right)}_{Induktionsschluss\,(IS)\,n\Rightarrow n+1}$ ist wahr

S1.5.2(703)
Rechenregeln in N: ∀ m,n∈ N gilt
1.)n≥1 (also 1=min N)
2.)n≠1 ⇒ ∃ k∈N: $\underbrace{n}_{\neq 1!!!}$ =k+1 ⇒ n-1=k∈N
3.)m+n∈N, d.h. N ist abgeschlossen bzgl Addition
4.)m*n∈N ⇒ N ist abgeschlossen bzgl Multiplikation
5.)m-n∈N wenn n<m
6.)m>n ⇒ m≥n+1 ⇒ Es gibt keine natürliche Zahl zwischen n und n+1
(n≠m ⇒ |n-m|≥1)
Bez:n+1 heißt Nachfolger von n∈N (n der Vorgänger von n+1).
Schreibweise: N={1,2,3....}, N_0={0,1,2,3...}, wobei 3=2+1,4=3+1 usw

S1.5.3(705) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung
Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" ∀ m∈N mit 1≤m≤n folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr",
Beh: $A_{(n)}$ ist wahr ∀ n∈N

S1.5.4(707) Archimedisches Prinzip
∀ a∈R ∃ n∈N:a<n(d.h. N ist in R nach oben nicht beschränkt)
Bem:1.) ∀ε>0 ∃ n∈N mit 1/n<ε(Prinzip des Eudoxos) ⇔
Archimedisches Prinzip
2.)Für a∈R gilt a=0 ⇔ |a|<1/n ∀ n∈N
(vgl S1.2.1 (408))
a=0 ⇔ |a|<ε ∀ ε∈K mit ε>0
3.) ∀ a,b>0 ∃ n∈N: na>b

S1.5.5(708) Wohlordnungssatz
Vor:M⊂N und M≠∅ Beh: ∃ minM

D1.5.2 (711)
In einem Körper K seien Elemente a,a_1,a_2,....a_n∈K für ein n∈ N eindeutig gegeben. Dann definieren wir

(.) Die Summe $\sum_{\nu=1}^{n}$ a_ν durch $$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{0} a_\nu := 0 \\ \sum_{\nu=1}^{1} a_\nu := a_1 \\ \sum_{\nu=1}^{m+1} a_\nu := a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu,\ 1\le m\le n-1 \end{cases}$$

Bem:Die Assoziativgesetze besagen: Klammern sind nicht nötig

Andere Formulierung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 0, \text{ falls } n<m \\ a_m, \text{ falls } n=m \\ \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n, \text{ falls } m+1 \le n \end{cases}$$

(..) Das Produkt $\prod_{j=1}^{n} a_j$ durch $\begin{cases} \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \\ \prod_{j=1}^{m+1} a_j := \left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right) \cdot a_{m+1},\ 0 \le m \le n-1 \end{cases}$

Andere Formulierung:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 1, \text{ falls } n<m \\ a_m, \text{ falls } n=m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n, \text{ falls } m+1 \ge n \end{cases}$$

(Motivation $\log(a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n) = \sum_{k=m}^{n} \log a_k$)

(...)Die Potenzen a^n durch $a^n = a * a^{n-1}$.

Für die Potenzen gelten die üblichen Rechenregeln.
Bew durch Induktion
n-faches von a :$n*a$, $\underbrace{1}_{\in R} *a := a$, $(m+1)a := a + ma$, $1 \le m \le n-1$, $\underbrace{0}_{\in R} *a = 0 \in K$
nte Potenz von a:a^n, $a^1 := a$, $a^{m+1} = a * a^m$, $1 \le m \le n-1$,
neutrales Element $a \in K \to a^0 = 1 \in K$ (auch für $a = 0 \in K$)

Bem:1.)obige Summen und Produkte sind $\forall\ n \in N$ eindeutig (rekursiv) definiert
2.)Aus (K4$\oplus$),(K$\otimes$1) folgt mit Induktion, dass n-fache Summen und Produkte unabhängig von der Klammersetzung sind

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

#3.) m>n: $\dfrac{\overbrace{a*a*a*\ldots*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n\,mal}} = a^{m-n}$,

Bem: $a_{\nu\mu}$ ($m_1 \le \nu \le n_1$, $m_2 \le \nu \le n_2$) $m_1 = m_2 = 1$ $n_1, n_2 \in N$.

$a_{11} \quad a_{12} \ldots\ldots a_{1 n_2}$ $\qquad \sum_{\nu=m_1}^{n_1} \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu} =: \sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu$, $\sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu = \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}$.

a_{21} ….. … a_{2n_2} $= \sum_{\mu=m_2}^{n_2} \sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$

… …. …..

$a_{n_1 1}$ ….. … $a_{n_1 n_2}$

---

a_{11} $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$.

a_{21} a_{22} $1 \le \nu \le n$

a_{31} a_{32} a_{33} $1 \le \mu \le \nu$

……. …….. …….

. . . .

a_{n1} a_{n2} a_{n3} …………………….. a_{nn}

S1.5.6(717)Unleichung von Bernoulli

Vor: $x \in \mathbb{R}$, $x \ge -1$, $n \in \mathbb{N}$

Beh: $(1+x)^n \ge 1+nx$, $(1+0)^n = 1+n*0x$, $(1+x)^0 = 1+0*x$, $(1+x)^1 = 1+1*x$,
Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1

Bem: 1.) n=0 $(1+x)^0 = 1 \ge 1+0 \cdot x$
2.) Für $x \ge -1$, $n \ge 2$, $x \ne 0 \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$ anstelle von $\ge$
...Induktionsanfang n=2